Probeklausur zur Linearen Algebra I
Bearbeitungszeit: 150 Minuten
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

a) Was ist eine Determinante?

b) Geben Sie die Definition einer Permutationsmatrix an.

c) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Determinante einer Permutationmatrix an.

d) Bestimmen Sie die Determinante der Permutationsmatrizen P_σ und P_τ, wobei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob die folgenden reellen Matrizen invertierbar sind und geben Sie gegebenfalls die inverse Matrix an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen von Vektoren linear unabhängig sind.

a) $L_1 = \{b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_4, b_4 + b_1\}$,

b) $L_2 = \{b_1 + b_2 + b_3, b_1 + b_2 + b_4, b_1 + b_3 + b_4, b_2 + b_3 + b_4\}$

c) $L_3 = \{2b_1 + 3b_2, b_3 - b_4, b_2 - 17b_3, b_4 + \frac{1}{2}b_1, b_4 + 19b_2\}$

Aufgabe 4

Seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 37 & 5 \\ 2 & -1 & 11 & 1 \\ -5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 33 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L_{A,b}$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

c) Gibt es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$, so dass $L_{A,c} = \emptyset$? Falls ja, geben Sie einen solchen Vektor an.

d) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums, der von den Spalten der Matrix A erzeugt wird.

Aufgabe 5

Seien K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum sowie $0 \neq v \in V$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$ gibt.

Aufgabe 6

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ für zwei $n \times n$-Matrizen A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Wenn $n > m$, dann gibt es eine injektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

c) Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängige Vektoren in V. Dann lässt sich jedes v_i als Linearkombination der Vektoren v_j, $j \neq i$, schreiben.

d) Seien U_1 und U_2 Untervektorräume eines endlich dimensionalen K-Vektorraums V mit $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim(V)$. Dann gilt $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.

e) Die Menge $\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A)^4 = 1\}$ bildet eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \cdot)$.

Aufgabe 7

Seien K ein Körper und V, W zwei endlich dimensionale K-Vektorräume. Seien ferner $f : V \to W$ und $g : V \to W$ zwei K-lineare Abbildungen mit $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Bild}(g) = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(f + g) = \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Kern}(g)$ gilt.