

# Lösungsskizze zur Probeklausur Lineare Algebra I

## Lösung Aufgabe 1

- a) Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt invertierbar, wenn es eine Matrix  $B \in K^{n \times n}$  mit  $A \cdot B = B \cdot A = E_n$  gibt.
- b) Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  ist genau dann invertierbar, wenn
- $\det(A) \neq 0$
  - $\text{Rang}(A) = n$
  - $\text{Kern}(A) = \{0\}$
- c) Siehe Vorlesungsmitschrift.
- d) Sei  $A = F_1 \cdots F_m$  ein Produkt von Elementarmatrizen  $F_i$ . Wir wissen, dass Elementarmatrizen invertierbar sind. Also ist  $A$  als Produkt invertierbarer Matrizen ebenso invertierbar.

Sei nun  $A$  eine invertierbare Matrix. Wir können  $A$  mittels elementaren Zeilenoperationen in seine reduzierte Zeilenstufenform  $A'$  überführen. Es gilt  $n = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A')$ . Nach Definition der reduzierten Zeilenstufenform muss  $A' = E_n$  gelten. Da wir  $A'$  aus  $A$  durch elementare Zeilenumformungen erhalten, so gilt  $A' = E_n = F_1 \cdots F_m \cdot A$  für die Elementarmatrizen  $F_i$ , welche zu den elementaren Zeilenoperationen korrespondieren. Da Elementarmatrizen invertierbar sind und ihre Inversen wieder Elementarmatrizen sind, folgern wir, dass  $A$  ein Produkt von Elementarmatrizen ist.

## Lösung Aufgabe 2

- a) Bestimmen Sie eine Zerlegung in Transpositionen der folgenden Permutationen.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\sigma = \sigma^{18} \sigma^{87} \sigma^{76} \sigma^{62} \sigma^{34} \quad \text{und} \quad \tau = \sigma^{12} \sigma^{23} \sigma^{37} \sigma^{76} \sigma^{64}.$$

- b) Es gilt  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^5 = -1$  und  $\text{sgn}(\tau) = (-1)^5 = -1$ .
- c) Es gilt  $\det(P_\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$ . Also  $\det(P_\sigma) = -1$  und ebenso  $\det(P_\tau) = -1$ . Außerdem haben wir

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Lösung Aufgabe 3

- a) Es gilt  $\det(A) = -1$  und damit  $\det(A^{2018}) = \det(A)^{2018} = (-1)^{2018} = 1$  nach dem Determinantenmultiplikationssatz.
- b) Wir benutzen den Gauss-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & | & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten somit

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$({}^tBB)^{-1} = B^{-1} \cdot ({}^tB)^{-1} = B^{-1} \cdot {}^t(B^{-1}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$({}^tBB)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -\frac{9}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{9}{2} & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Nach Aufgabe 3a) auf Blatt 12 gilt  $\text{Rang}({}^tC \cdot C) \leq \text{Rang}(C) \leq 3$ . Also gilt  $\det({}^tC \cdot C) = 0$ . Damit hat  ${}^tC \cdot C \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  Rang echt kleiner als 4 und ist somit nicht invertierbar. Es gilt

$$C \cdot {}^tC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt  $\det(C \cdot {}^tC) = 13$ .

### Lösung Aufgabe 4

- a) Da  $v_1, v_2, v_3$  per Definition ein Erzeugendensystem von  $U$  bilden, so reicht es zu zeigen, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Seien  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ . Es gelten also insbesondere die Gleichungen
- $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$

- $-\lambda_3 = 0$
- $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ .

Aus der zweiten Gleichung folgt  $\lambda_3 = 0$ . Aus der ersten und dritten Gleichungen folgern wir  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  ist. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

b) Wir behaupten, dass die Vektoren  $v_1, v_2, v_3, e_4, e_5$  linear unabhängig sind. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = 0$ . Wie in Teil b) gelten nun insbesondere die Gleichungen

- $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$
- $-\lambda_3 = 0$
- $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$

aus denen wir wiederum  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  folgern können. Aus der vierten und fünften Gleichung folgern wir damit direkt, dass  $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$  sein muss. Da die Vektoren  $v_1, v_2, v_3, e_4, e_5$  linear unabhängig sind und  $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$  ist, so bilden sie bereits eine Basis.

c) Wegen Teil b) können wir  $U_1 = \langle e_4, e_5 \rangle$  wählen.

d) Wegen Teil b) können wir  $U_2 = \langle v_3, e_4 \rangle$  wählen.

## Lösung Aufgabe 5

Wir benutzen den Gauss-Algorithmus und nehmen zunächst  $\lambda \neq 2$  an.

$$(A_\lambda | b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\lambda \neq 2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\lambda-2} \\ 0 & 2 & 2-\lambda & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{(\lambda-2)^2} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & p(\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{\lambda-2} \end{array} \right),$$

wobei  $p(\lambda) := 1 + \frac{2}{\lambda-2} - \frac{2}{(\lambda-2)^2}$ . Für  $\lambda = 2$  gilt

$$(A_2 | b) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a) Für  $\lambda \neq 2$  gilt also  $\text{Kern}(A_\lambda) = \{0\}$  und somit  $\text{Bild}(A_\lambda) = \mathbb{R}^3$ . Für  $\lambda = 2$  gilt

$\text{Kern}(A_2) = \text{Spann}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ . Ferner erzeugen die Spalten der Matrix  $A$  das Bild

und es gilt somit  $\text{Bild}(A_2) = \text{Spann}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ .

b) Für  $\lambda \neq 2$  gilt  $L_{A_\lambda, b} = \text{Spann}\left(\begin{pmatrix} p(\lambda) \\ \frac{-1}{\lambda-2} \\ \frac{-2}{\lambda-2} \end{pmatrix}\right)$  und für  $\lambda = 2$  gilt  $L_{A_2, b} = \emptyset$ .

c) Ja. Nach Teil b) gilt etwa  $L_{A_2, b} = \emptyset$ .

### Lösung Aufgabe 6

Betrachten Sie für  $x \in \mathbb{R}$  die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & x^2 & & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Zeigen Sie, dass  $\det(A(x)) = (1 - x^n)^{n-1}$  ist. Für  $i = n - 1, \dots, 1$  tue folgendes: Subtrahiere das  $x$ -fache der  $i$ -ten Spalte von der  $(i + 1)$ -ten Spalte. Wir erhalten die Matrix

$$A'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^{n-1} & 1 - x^n & 0 & \dots & 0 \\ x^{n-2} & 0 & 1 - x^n & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & 0 & & \dots & 1 - x^n \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich  $\det(A(x)) = \det(A'(x)) = (1 - x^n)^{n-1}$ .

### Lösung Aufgabe 7

a) Zunächst stellen wir fest, dass die Nullfunktion  $0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  in  $U_1$  und  $U_2$  liegt.

- Seien  $f, g \in U_1$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = -(f(-x) + g(-x)) = -(f + g)(-x)$  und somit  $f + g \in U_1$ . Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda(-f(-x)) = -(\lambda f)(-x)$  und somit  $\lambda f \in U_1$ .
- Seien  $f, g \in U_2$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$  und somit  $f + g \in U_2$ . Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x)$  und somit  $\lambda f \in U_2$ .

b) Sei  $f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  beliebig. Definiere  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad h(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Wegen

$$-g(-x) = -\frac{f(-x) - f(x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = g(x)$$

gilt  $g \in U_1$  und wegen

$$h(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = h(x)$$

gilt  $h \in U_2$ . Außerdem gilt

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$

und daher  $g + h = f$ . Wir erhalten somit  $M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U_1 + U_2$ .

Sei nun  $f \in U_1 \cap U_2$ . Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt dann  $f(x) = f(-x) = -f(x)$  und somit  $2f(x) = 0$ , also  $f = 0$ . Mit anderen Worten  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ .

- c) • Seien  $f, g \in M(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\varphi(f + g)(n) = (f + g)(n + 1) = f(n + 1) + g(n + 1) = \varphi(f)(n) + \varphi(g)(n)$$

also  $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ . Außerdem gilt

$$(\lambda\varphi)(f)(n) = (\lambda f)(n + 1) = \lambda f(n + 1) = \lambda\varphi(f)(n)$$

also  $\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$ . Somit ist die Abbildung  $\varphi$  linear.

- Es ist

$$\text{Kern}(\varphi) = \{f \in M(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid f(n) = 0 \text{ für alle } n > 0\}.$$

Sei  $e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $e(n) = 0$  für  $n > 0$  und  $e(0) = 1$ . Dann gilt  $\text{Kern}(\varphi) = \text{Spann}(\{e\})$ . Also ist  $\varphi$  nicht injektiv.

- Für  $f \in M(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  beliebig definieren wir  $g(n) := f(n - 1)$  für  $n > 0$  und  $g(0) = 0$ . Damit gilt  $\varphi(g)(n) = g(n + 1) = f(n)$ . Also gilt  $\varphi(g) = f$  und somit ist  $\varphi$  surjektiv.

## Lösung Aufgabe 8

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

- a) Diese Aussage ist falsch. Zunächst zeigen wir dazu folgende Hilfsaussage:

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $n > 1$ . Dann gibt es unendlich viele Untervektorräume der Dimension  $n - 1$ .

*Beweis:* Da  $V$  isomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist, können wir ohne Einschränkung  $V = \mathbb{R}^n$  annehmen. Sei  $0 \neq A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ . Dann definiert  $\text{Kern}(A)$  einen Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - 1$ .

Für Matrizen  $0 \neq A, B \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  gilt nun  $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(B)$  genau dann, wenn  $A = \lambda B$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dies folgt aus folgender Überlegung: Seien  $0 \neq A, B \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  mit  $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(B)$  und  $x \in V \setminus \text{Kern}(A)$ . Dann ist  $Bx, Ax \in \mathbb{R}$  und wir finden  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda Bx = Ax$ . Dann stimmen aber  $\lambda B$  und  $A$  auf  $\text{Spann}(\{x\}) + \text{Kern}(A) = \mathbb{R}^n$  überein. Somit also  $\lambda B = A$ . Die andere Richtung ist trivial.

Da nun  $n > 2$  ist, gibt es unendlich viele Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  mit  $A_{11} = 1$ , die unterschiedliche Kerne haben. Dies beweist die Aussage.

Nehmen wir nun an, dass es Untervektorräume  $U_1, U_2, \dots, U_n \subsetneq \mathbb{R}^3$  des  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\mathbb{R}^3 = \bigcup_{i=1}^n U_i$$

gibt. Sei  $U$  ein Untervektorraum der Dimension 2 des  $\mathbb{R}^3$  mit  $U \neq U_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Also ist  $U'_i := U \cap U_i$  ein echter Untervektorraum von  $U$ . Wir können also

$$U = \bigcup_{i=1}^n U'_i$$

schreiben. Nun finden wir einen Untervektorraum  $U'$  von  $U$  der Dimension 1 mit  $U' \neq U'_i$ . Also ist  $U' \cap U'_i$  ein echter Untervektorraum von  $U'$  und daher  $U' \cap U'_i = \{0\}$ . Wir erhalten somit den Widerspruch  $U' = \{0\}$ .

b) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Sei

$$U := \{A = (a_{ij}) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid a_{i,j} = 0 \text{ für } i > j \text{ und } a_{i,i} = 1 \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Wir behaupten, dass  $U$  eine Untergruppe von  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  ist.

Es gilt offensichtlich  $E_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Seien  $A, B \in U$ . Nach Blatt 10 Aufgabe 1 sind  $A \cdot B$  und  $A^{-1}$  obere Dreiecksmatrizen. Wir müssen also nur noch  $(A \cdot B)_{ii} = (A^{-1})_{ii} = 1$  für  $i = 1, \dots, n$  zeigen. Da  $A$  und  $B$  obere Dreiecksmatrizen sind, so gilt  $(A \cdot B)_{ii} = A_{ii} \cdot B_{ii} = 1 \cdot 1 = 1$ . Wegen  $A \cdot A^{-1} = E_n$  gilt auch  $1 = (E_n)_{ii} = (A \cdot A^{-1})_{ii} = A_{ii}(A^{-1})_{ii} = (A^{-1})_{ii}$ .

d) Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  gilt  $A \cdot B = 0$ , aber  $B \cdot A = A \neq 0$ .

### Lösung Aufgabe 9

Betrachten Sie die lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ -5x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

a) Es gilt  $M_B^A(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ .

b) Die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind offensichtlich kein Vielfaches voneinander und daher linear unabhängig. Wegen  $|A'| = \dim(\mathbb{R}^2)$  bilden die Vektoren aus  $A'$  daher eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Man sieht außerdem schnell ein, dass die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  linear unabhängig sind. Wegen  $|B'| = \dim(\mathbb{R}^3)$  bilden die Vektoren aus  $B'$  daher eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

c) Es gilt  $e_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $e_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Somit erhält man

$$M_{A'}^A(\text{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Also erhalten wir

$$M_{B'}^B(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$M_{B'}^{A'}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Lösung Aufgabe 10

a) Es gilt

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Spann} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

Wir bemerken, dass  $-\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Also ist

$$U_2 = \text{Spann} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

b) Es gilt sicherlich  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in U_1$ , aber  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin U_1$ . Somit ist  $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$ .

Andererseits ist  $U_1 \cap U_2$  ein echter Untervektorraum von  $U_2$ . Also  $\dim(U_1 \cap U_2) <$

$\dim(U_2) = 2$ . Somit ist  $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$  und  $U_1 \cap U_2 = \text{Spann}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ .

Nach der Dimensionsformel für Untervektorräume gilt  $\dim(U_1 + U_2) = 3$ . Andererseits gilt

$$U_1 + U_2 = \text{Spann} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) = \text{Spann} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right),$$

wobei die letzte Gleichheit aus  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in U_1 \cap U_2$  folgt.

c) Die Vektoren  $e_1, e_2, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^4$ . Wir können daher eine lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 0, \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

definieren. Diese Abbildung hat offensichtlich die geforderten Eigenschaften.

### Lösung Aufgabe 11

(i) Es gilt  $e_1 = a_1 - a_2 + a_3$ ,  $e_2 = a_2 - a_3$ ,  $e_3 = -a_1 + a_2$ . Somit bilden die Vektoren  $a_1, a_2, a_3$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  und gemäß Vorlesung können wir eine lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f(a_i) = b_i$  für  $i = 1, 2, 3$  definieren. Es gilt nun

- $f(e_1) = f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) = b_1 - b_2 + b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

- $f(e_2) = f(a_2) - f(a_3) = b_2 - b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- $f(e_3) = -f(a_1) + f(a_2) = -b_1 + b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt also  $f(v) = A \cdot v$ .

(ii) Wir beachten, dass  $3 \cdot a_1 + a_2 = a_3$ , aber auch  $3 \cdot b_1 + b_2 = b_3$ . Wir ergänzen  $a_1, a_2$  mit  $e_1$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Nach Vorlesung können wir nun eine lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch  $f(a_1) = b_1$ ,  $f(a_2) = b_2$  und  $f(e_1) = 0$  definieren. Wir beachten, dass  $f(a_3) = 3 \cdot f(a_1) + f(a_2) = 3 \cdot b_1 + b_2 = b_3$ . Also erfüllt  $f$  die geforderten Bedingungen. Weiterhin gilt  $e_2 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 - 2e_1)$  und  $e_3 = \frac{3}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}e_1$ . Somit erhalten wir

- $f(e_1) = 0$

- $f(e_2) = \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4}b_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



- $f(e_3) = \frac{3}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Für

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt also  $f(v) = A \cdot v.$