Prof. Dr. Britta Späth
MSc Lucas Ruhstorfer

25. September 2017

Klausur zur Linearen Algebra 1

Nummer: 1

Bitte tragen Sie die folgenden Daten lesbar und in Blockschrift ein:

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt:
Max. Punktzahl:	8	10	8	8	12	8	54
Erreichte Punktzahl:							

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Mit 28 Punkten ist die Klausur sicher bestanden.

Schreiben Sie auf jeden Klausurbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!

Es gelten die Notationen aus der Vorlesung. Alle Beweis- und Rechenschritte müssen erläutert werden.

Aufgabe 1
Seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume für einen Körper K und $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Menge von n Vektoren von V.

a) Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ linear?
b) Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ surjektiv?
c) Wann ist $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V?
d) Beweisen Sie: Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V, so gilt:
f ist genau dann surjektiv, wenn $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ ein Erzeugendensystem von W ist.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie den Rang der folgenden reellen Matrizen A und $B_{s,t}$ in Abhängigkeit von $s, t \in \mathbb{R}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_{s,t} = \begin{pmatrix} 0 & s & s & s \\ t & 0 & s & s \\ t & t & 0 & s \end{pmatrix}.$$
b) Seien $C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ invertierbar. Beweisen Sie für das Produkt und die transponierte Matrix folgende Gleichungen:
$$({}^tC)^{-1} = {}^t(C^{-1}) \text{ und } (C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}.$$
c) Bestimmen Sie für $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ das Inverse der Matrix $C \cdot {}^tC$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t - s \\ 3t + 2s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.
b) Bestimmen Sie eine Basis von $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\dim(U_2)$.
c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Entscheiden Sie, ob die Vektoren $b_2, b_3, b_1 + b_2 + b_3$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4
Seien die Matrix $A_\lambda \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben durch $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 & 3\lambda - 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2\lambda - 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ die Lösungsmenge $L_{A_\lambda,b}$ des linearen Gleichungssystems $A_\lambda \cdot x = b$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des zu A_λ gehörigen homogenen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von λ.

c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$ mit $L_{A_\lambda,c} = \emptyset$? Bestimmen Sie in diesen Fällen einen Vektor c.

Aufgabe 5
Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. (1 Punkt je Aufgabenteil) **Begründen** Sie Ihre Antwort, indem Sie die Aussage beweisen oder widerlegen. (2 Punkte je Aufgabenteil)

a) Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und gerades n gilt $\det(-A) = \det(A)$.

b) Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Dann ist die Matrix $A^2 - E_n$ genau dann invertierbar, wenn die Matrizen $A - E_n$ und $A + E_n$ invertierbar sind.

c) Für alle Permutationsmatrizen $P_1, P_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ gilt $P_1P_2 = P_2P_1$.

d) Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^3$ hat unendlich viele eindimensionale Untervektorräume.

Aufgabe 6
Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit Untervektorräumen U_1 und U_2.

a) Was besagt der Dimensionssatz für die Untervektorräume U_1 und U_2?

b) Nehmen Sie an, dass n ungerade ist. Zeigen Sie, dass $\dim(U_1 \cap U_2)$ ungerade ist, falls die Gleichungen $V = U_1 + U_2$ und $\dim U_1 = \dim U_2$ gelten.

c) Zeigen Sie, dass $1 \le \dim(U_1 \cap U_2) \le 3$ gilt, falls $n = 5$ und $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 3$.

d) Seien $n = 5$ und $U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Geben Sie für alle $m \in \{1, 2, 3\}$ einen passenden Untervektorraum U_2 an, so dass $\dim U_2 = 3$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = m$ gilt.

Viel Erfolg !