Nachklausur zur Linearen Algebra I
Sommersemester 2016
5. Oktober 2016, 14:30 - 16:30 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte tragen Sie die folgenden Daten leserlich und in Blockschrift ein:

Name	Vorname	Matrikelnummer
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Max. Punktzahl	4	4	2	2	4	4	4	24	
erreichte Punktzahl									

Es gelten die Notationen aus der Vorlesung.

Aufgabe 1

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Matrix $A_\lambda \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A_λ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A_\lambda \cdot x = b$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $x \mapsto A \cdot x$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

b) Bestimmen Sie eine Basis des Schnitts $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f)$.

c) Gibt es einen Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ mit $f(x) \neq 0$, aber $f^2(x) = 0$?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Aufgabe 4

Gegeben sei der Untervektorraum $U = \langle (1,0,1,0),(0,0,1,1)\rangle$ des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie zweidimensionale Untervektorräume U_1 und U_2 des $\mathbb{R}^4$, so dass

$$\dim(U \cap U_1) = 0 \text{ und } \dim(U \cap U_2) = 1.$$

Aufgabe 5

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in V \mid f(x) = x\}$ die Menge der Fixpunkte von f.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}(f)$ ein Untervektorraum von V ist.

b) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $x \mapsto A\cdot x$, wobei $A = \begin{pmatrix} 8 & -63 & 14 \\ 2 & -17 & 4 \\ 8 & -72 & 17 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = (\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathrm{Fix}(g)$ ist.

c) Ergänzen Sie $\mathcal{A}$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ und bestimmen Sie $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$.

d) Zeigen Sie, dass die Abbildung g invertierbar ist und bestimmen Sie $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g^{-1})$.

Aufgabe 6

Seien K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Die Abbildung $\varphi : K^{n\times n} \to K$, die eine Matrix X mit Einträgen x_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$, auf $\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$ abbildet, ist K-linear.

b) Seien $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ die Einheitsvektoren des K^3. Dann gibt es einen zweidimensionalen Untervektorraum U von V, so dass $U \cap \langle e_i\rangle = \{0\}$ für alle $i = 1,2,3$ gilt.

c) Seien $f : V \to W$ und $g : W \to V$ lineare Abbildungen. Dann ist $f \circ g$ genau dann invertierbar, wenn $g \circ f$ invertierbar ist.

d) Seien $v, w \in V$ zwei Vektoren mit $v \neq w$. Sei $f : V \to K$ eine lineare Abbildung mit $1 = f(v) = f(w)$. Dann sind die Vektoren v und w linear unabhängig.

Aufgabe 7

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V\backslash\{0\}$ Vektoren, so dass $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für paarweise verschiedene Skalare $\lambda_i \in K$, also $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Zeigen Sie mittels Induktion, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.