Lösungsskizze zur Hauptklausur Lineare Algebra I

Aufgabe 1
Seien V und W zwei K-Vektorräume für einen Körper K.

a) Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ linear?

b) Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ injektiv?

c) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie $f(0_V) = 0_W$.

d) Beweisen Sie: Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt:
f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in V$ und
- $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in V$ und $\lambda \in K$.

b) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt injektiv, wenn für alle $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$ immer $x = y$ gilt.

c) Es gilt $f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V)$. Somit also $f(0_V) = 0_W$.

d) " $\Rightarrow$ " : Nach Teil c) gilt $0_V \in \mathrm{Kern}(f)$. Sei $x \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt $f(x) = 0_W = f(0_V)$. Da f injektiv ist, gilt also $x = 0_V$.

" $\Leftarrow$ " : Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt

$$f(x - y) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_V$$

wegen der Linearität von f. Somit $x - y \in \mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$. Also $x = y$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\det(A^3)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Berechnen Sie für $\mu \in \mathbb{R}$ die Determinante von $B_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mu & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

c) Entscheiden Sie, ob die Matrix $C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenfalls ihr Inverses.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Durch Laplace-Entwicklung nach der 2. Zeile ergibt sich

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Somit ergibt sich $\det(A^3) = \det(A)^3 = (-1)^3 = -1$ nach dem Determinantenmultiplikationssatz.

b) Durch Vertauschen der dritten Zeile mit der ersten Zeile und Vertauschen der zweiten Zeile mit der vierten Zeilen erhalten wir

$$\det(B_\mu) = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mu & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über die Berechnung von Determinanten von Blockmatrizen gilt jetzt

$$\det(B_\mu) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1-\mu) \cdot 3.$$

c) Wir benutzen den Gauss-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten somit

$$C^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\dim U_2$.

c) Entscheiden Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wir rechnen die Unterraumaxiome nach:

- Wegen $0 + 0 - 0 = 0$ gilt $0_{\mathbb{R}^3} \in U$.
- Seien $x, y \in U$. Dann gilt $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ und $y_1 + y_2 - y_3 = 0$. Somit gilt $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - (x_3 + y_3) = 0$. Also $x + y \in U$.
- Sei $x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Also $0 = \lambda \cdot 0 = \lambda(x_1 + x_2 - x_3) = \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 - \lambda \cdot x_3 = 0$. Somit $\lambda \cdot x \in U$.

b) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden per Definition ein Erzeugendensystem von V. Wir testen die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit, indem wir überprüfen ob die von ihnen gebildete Matrix invertierbar ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 4 - 1 - 0 - 2 = 0.$$

Daher sind die Vektoren linear abhängig. Da der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist, sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig und bilden daher ein maximales Erzeugendensystem von U_2, also eine Basis.

c) Wir testen die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten dadurch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeilenumformungen liefern:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat also Rang 3 und das obige Gleichungssystem hat nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Aufgabe 4
Seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und $b_\mu \in \mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b_\mu = \begin{pmatrix} \mu \\ 3+\mu \\ 1-\mu \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A und $(A \mid b_\mu)$ in Abhängigkeit von μ.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge L_{A,b_μ} des linearen Gleichungssystems $Ax = b_\mu$ in Abhängigkeit von μ.

c) Gibt es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$, so dass $L_{A,c} = \emptyset$? Falls ja, geben Sie einen solchen Vektor an.

Lösung zu Aufgabe 4
Wir benutzen des Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & \mu \\ 1 & 4 & 10 & 2 & 3+\mu \\ -1 & 0 & -2 & 2 & 1-\mu \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & \mu \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & \mu \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & \mu-1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Aus der obigen Rechnung folgern wir $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b_\mu) = 2$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.

b) Es gilt

$$L_{A,b_\mu} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu - 1 - 2x_3 + 2x_4 \\ 1 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Sei f_A die zu A gehörige lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Da $\mathrm{Rang}(A) = 2 < 3$, ist $\mathrm{Bild}(f_A)$ ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2. Daher gibt es einen Vektor c, so dass $L_{A,c} = \emptyset$.

Der Untervektorraum $\mathrm{Bild}(f_A)$ ist gerade der Untervektorraum der von den Spalten der Matrix A erzeugt wird. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich linear unabhängig und bilden daher eine Basis von $\mathrm{Bild}(f_A)$. Für $c := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sieht man leicht ein, dass $c \notin \mathrm{Bild}(f_A)$ gilt. Somit gilt $L_{A,c} = \emptyset$.

Aufgabe 5
Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. (1 Punkt je Aufgabenteil)
Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie die Aussage beweisen oder widerlegen. (2 Punkte je Aufgabenteil)

a) Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \det(A)$.

b) Wenn $m > n$ ist, dann gibt es eine surjektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

c) Die Menge $U := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ bildet eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

d) Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $A \cdot B = \mathbb{O}$ genau dann, wenn $B \cdot A = \mathbb{O}$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Aussage ist **falsch**.
Es ist $4 = \det(2 \cdot E_2) \neq 2 = 2 \cdot \det(E_2)$.

b) Die Aussage ist **falsch**.
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine surjektive lineare Abbildung. Dann gilt

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + m \geq m$$

nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

c) Die Aussage ist **wahr**.
Wir rechnen die Untergruppenaxiome nach.

- Es ist $E_n \in U$, denn $\det(E_n) = 1$.
- Seien $A, B \in U$. Dann gilt $AB^{-1} \in U$, denn

$$\det(AB^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$$

gemäß dem Determinantenmultiplikationssatz.

d) Die Aussage ist **falsch**.
Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A \cdot B = \mathbb{O}$, aber $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$.

Aufgabe 6

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

a) Was besagt der Dimensionssatz für f?

b) Zeigen Sie, dass n gerade ist, falls $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$.

c) Sei U ein Untervektorraum von V mit $V = U + \mathrm{Kern}(f)$ und $U \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$. Weiter sei $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von U und es gelte $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$. Beweisen Sie, dass $\{w_1, \ldots, w_m, f(w_1), \ldots, f(w_m)\}$ eine Basis von V ist.

d) Geben Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Bild}(g) = \mathrm{Kern}(g)$ an.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Es ist $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

b) Gemäß der Dimensionformel für lineare Abbildungen gilt

$$n = \dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2 \cdot \dim(\mathrm{Kern}(f)).$$

Also ist n gerade.

c) Es gilt

$$n = \dim(V) = \dim(U) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(U) + \frac{n}{2}$$

nach der Dimensionformel für Untervektorräume. Somit ist $m = \frac{n}{2}$. Damit besteht die Menge $\{w_1, \ldots, w_m, f(w_1), \ldots, f(w_m)\}$ genau aus n Vektoren. Nach der Charakterisierung von Basen als maximal linear unabhängige Mengen von Vektoren reicht es zu zeigen, dass die Menge $\{w_1, \ldots, w_m, f(w_1), \ldots, f(w_m)\}$ linear unabhängig ist. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i f(w_i) = 0_V.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i = f(-\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i) \in \mathrm{Bild}(f) \cap U = \{0_V\}.$$

Somit also

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i = 0_V \text{ und } \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i \in \mathrm{Kern}(f).$$

Da $\{w_1, \ldots, w_m\}$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Außerdem ist $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i \in \mathrm{Kern}(f) \cap U = \{0\}$. Somit $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i$, was $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ zeigt.

d) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Bild}(g) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.