Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Lösung zu Aufgabe 1

a) Eine Abbildung $\det : K^{n\times n} \to K$ heißt Determinante, wenn Sie linear in jeder Zeile, alternierend und normiert ist.

b) Eine $n \times n$-Permutationsmatrix ist eine $n \times n$ Matrix mit der Eigenschaft, dass in jeder Spalte und jeder Zeile immer genau ein Eintrag gleich 1 ist und alle anderen Einträge gleich Null sind.

c) Für $\sigma \in S_n$ gilt $\det(P_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

d) Wegen $\sigma = \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4}$ gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau_{1,2}) \cdot \operatorname{sgn}(\tau_{3,4}) = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Da τ ein 5-Zykel ist, so gilt $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{5+1} = 1$. Somit folgt $\det(P_\sigma) = \det(P_\tau) = 1$ nach Aufgabenteil c).

Lösung zu Aufgabe 2
Sei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine invertierbare 2×2 Matrix. Dann gilt $X^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ gemäß der Cramerschen Regel.

Aus diesen Vorüberlegungen schließen wir $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Mithilfe der Rechenregeln für Blockmatrizen folgt dann weiterhin

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-3} & \frac{-2}{-3} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{-3} & \frac{1}{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten s_1, s_2, s_3 der Matrix B sind linear abhängig, da $s_1 + s_2 = s_3$ gilt. Somit ist die Matrix B nicht invertierbar. Da D keine quadratische Matrix ist, so ist D nicht invertierbar.

Lösung zu Aufgabe 3
Seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ vier Vektoren. Da $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist, gibt es Skalare $\lambda_{i,j} \in K$ mit $v_i = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{i,j} b_j$. Seien $\mu_i \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{4} \mu_i v_i = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_{i,j} \mu_i \right) b_j = 0.$$

Da die Vektoren b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis von V bilden, also insbesondere linear unabhängig sind, so folgt

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_{i,j} \mu_j = 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, 4.$$

Dies ist äquivalent zum linearen Gleichungsystem $\Lambda \cdot \mu = 0$, wobei $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i,j}$ und $\mu = (\mu_i)_i$.

Somit gilt: Die Vektoren $v_1, \dots, v_4$ sind genau dann linear unabhängig, wenn das Gleichungsystem $\Lambda \cdot \mu = 0$ nur die triviale Lösung hat.

a) Wir setzen $v_1 = b_1 + b_2$, $v_2 = b_2 + b_3$, $v_3 = b_3 + b_4$ und $v_4 = b_4 + b_1$. Damit erhalten wir

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(\Lambda) = 0$ hat das lineare Gleichungssystem $\Lambda \cdot \mu = 0$ eine nichttriviale Lösung. Also ist die Menge L_1 von Vektoren linear abhängig.

b) Durch analoges Vorgehen wie in Teil a) erhalten wir

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(\Lambda) \neq 0$ hat das lineare Gleichungssystem $\Lambda \cdot \mu = 0$ nur die triviale Lösung. Also ist die Menge L_2 von Vektoren linear unabhängig.

c) Wegen $|L_3| = 5 > 4 = \dim(V)$ sind die Vektoren in L_3 linear abhängig.

Lösung zu Aufgabe 4

Wir betrachten das erweiterte lineare Gleichungssystem

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 37 & 5 & 33 \\ 2 & -1 & 11 & 1 & 12 \\ -5 & 4 & 4 & 2 & -3 \end{array} \right).$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhält man

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 16 & 2 & 15 \\ 0 & 1 & 21 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

a) Da die Zeilenstufenform von A zwei Stufen hat, gilt $\operatorname{rang}(A) = 2$.

b) Durch Einsetzen der Variablen erhält man

$$L_{A,b} = \left\{ \begin{pmatrix} 15 - 16x_3 - 2x_4 \\ 18 - 21x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

als Lösungsmenge des Gleichungssystems.

c) Der Untervektorraum Bild(f_A) ist gerade der Untervektorraum, der von den Spalten der Matrix A erzeugt wird. Es gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f_A)) = \mathrm{rang}(A) = 2$.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich linear unabhängig. Daher bilden diese bereits eine Basis von Bild(f_A).

Für einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$ gilt $L_{A,c} = \emptyset$ genau dann, wenn $c \notin \mathrm{Bild}(f_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$. Es gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Bild}(f_A)$, da die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

direkt einen Widerspruch erzeugt. Somit gilt $L_{A_c} = \emptyset$ für $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Wir haben bereits in Teil c) argumentiert, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis des Untervektorraums bilden, der von den Spalten der Matrix A erzeugt wird.