Übungen zur Linearen Algebra II | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 6 | PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis 23.11.2017, 16 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1
Es seien $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Man betrachte die K-lineare Abbildung

$$\varphi : M_2(K) \to M_2(K),\ A \mapsto {}^tA.$$

Man berechne das charakteristische Polynom χ_φ, die Eigenwerte von φ und entscheide, ob φ diagonalisierbar ist. Falls ja, bestimme man eine Basis $\mathcal{B}$ von $M_2(K)$, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2
Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, so dass es Vektoren $0 \neq x, y \in V$ mit $\varphi(x) = y$ und $\varphi(y) = -x$ gibt. Zeigen Sie, dass φ nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3
Man betrachte nochmals die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq n} \to \mathbb{R}[X]_{\leq n};\ f \mapsto f'$$

aus Aufgabe 3 von Blatt 5.

a) Man bestimme das Minimalpolynom $\mu_\varphi \in \mathbb{R}[X]$ von φ. Wie verhält es sich zum charakteristischen Polynom von φ?

b) Für alle Teiler $f \in \mathbb{R}[X]$ von μ_φ bestimme man den verallgemeinerten Eigenraum $T_f(\varphi)$.

Aufgabe 4
Es seien $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die **Alles-1-Matrix**

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte von I_n.

b) Bestimmen Sie die geometrische und algebraische Vielfachheit der Eigenwerte von I_n.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von I_n. Entscheiden Sie, ob I_n diagonalisierbar ist.