**Übungen zur Linearen Algebra II** | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 3 | PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis 02.11.2017, 16 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

---

**Aufgabe 1**
Es seien $K$ ein Körper und $K[X]_{\leq n} := \{f \in K[X]; f = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(f) \leq n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Für ein Polynom $f = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ definiert man eine **formale Ableitung** durch
$$f' = na_nX^{n-1} + \cdots + 2a_2X + a_1.$$
Zeigen Sie, dass die **Produktregel**
$$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g' \in K[X]$$
gilt.

b) Für $f \in K[X]$ und $a \in K$ sei $\nu_a(f) \in \mathbb{N}_0$ die zugehörige **Nullstellenvielfachheit**, das heißt die Vielfachheit von $X - a$ als Faktor von $f$. Man zeige: Es ist genau dann $\nu_a(f) = 1$, wenn $f(a) = 0$ und $f'(a) \neq 0$ ist.

**Aufgabe 2**
Man bestimme jeweils einen größten gemeinsamen Teiler von $f$ und $g$ in $\mathbb{Q}[X]$ und zugehörige Bézout-Koeffizienten:

a) $f := 3X^3 - 7X^2 + 5X - 1$ und $g := -6X^2 + 5X - 1$.

b) $f := X^3 - 6X^2 + X + 4$ und $g := X^5 - 6X + 1$.

c) $f := X^m - 1$ und $g := X^n - 1$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

**Hinweis zu Teil b):** Die Koeffizienten der Polynome, die beim Durchführen des euklidischen Algorithmus auftreten, werden relativ groß.

**Hinweis zu Teil c):** Vergleichen Sie dies mit Aufgabe 3b) auf Blatt 2.

**Aufgabe 3**
Es sei $R$ ein Integritätsbereich. Seien $p, q \in R$ zwei irreduzible Elemente und $a \in R$ beliebig. Zeigen Sie:

a) Die Elemente $a$ und $p$ sind entweder teilerfremd oder es gilt $p \mid a$.

b) Die Elemente $p$ und $q$ sind entweder teilerfremd oder es gilt $p \sim q$.

**Aufgabe 4**
Sei $\mathbb{Z}[i]$ der Ring der Gaußschen Zahlen und $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$, $z \mapsto z \cdot \overline{z}$ die Normabbildung von Aufgabe 4 auf Blatt 2.

a) Zeigen Sie, dass für $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$ gilt $N(zz') = N(z) \cdot N(z')$. Wir sagen, dass die Normabbildung $N$ **multiplikativ** ist. Folgern Sie daraus, dass $u \in \mathbb{Z}[i]$ irreduzibel ist, wenn $N(u) \in \mathbb{Z}$ irreduzibel ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring bezüglich der Bewertungsfunktion $N : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ ist.

**Hinweis zu Teil b):** Für $u \in \mathbb{Z}[i]$ und $0 \neq v \in \mathbb{Z}[i]$ betrachte man $s := \Re(uv^{-1}) \in \mathbb{Q}$ und $t := \Im(uv^{-1}) \in \mathbb{Q}$. Es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $|a - s| \leq \frac{1}{2}$ und $|b - t| \leq \frac{1}{2}$ gilt. Für $q := a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ und $r := u - qv \in \mathbb{Z}[i]$ gilt dann $N(r) < N(v)$.