Bergische Universität Wuppertal
PD Dr. Jürgen Müller
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Es seien R ein Ring und M eine Menge. Man zeige:

a) Die Menge $\text{Abb}(M, R)$ wird durch **punktweise** Addition $f + g : M \to R$, $x \mapsto f(x) + g(x)$ und Multiplikation $f \cdot g : M \to R$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ zu einem Ring. Was sind die neutralen Elemente?

b) Wann ist $\text{Abb}(M, R)$ kommutativ? Wann ist $\text{Abb}(M, R)$ der Nullring? Wann ist $\text{Abb}(M, R)$ ein Integritätsbereich?

Aufgabe 2

Es seien R ein Integritätsbereich und $a, b, c \in R$.

a) Man zeige die folgende **Kürzungsregel**: Ist $a \neq 0$, so gilt $ab = ac$ genau dann, wenn $b = c$ ist.

b) Nun seien R faktoriell, und $a, b \neq 0$ teilerfremd. Man zeige:

   (i) Es gilt $a \mid bc$ genau dann, wenn $a \mid c$ gilt.

   (ii) Gilt $a \mid c$ und $b \mid c$, so folgt bereits $ab \mid c$.

Aufgabe 3

a) Für $a := 223\,092\,870$ und $b := 143\,197\,215$ bestimme man $\text{ggT}(a, b) \subseteq \mathbb{Z}$, und für $d \in \text{ggT}(a, b)$ bestimme man Bézout-Koeffizienten $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $d = sa + tb$.

b) Für $k, m, n \in \mathbb{N}$ zeige man: Es gilt $\text{ggT}_+(k^m - 1, k^n - 1) = k^{\text{ggT}_+(m,n)} - 1$. Dabei bezeichne ggT_+ jeweils den **nichtnegativen** größten gemeinsamen Teiler.

Aufgabe 4

Wir betrachten die folgende Teilmenge $\mathbb{Z}[i] := \{x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{Z}\}$ der komplexen Zahlen.

a) Man zeige: $\mathbb{Z}[i]$ wird mit Addition und Multiplikation komplexer Zahlen zu einem Integritätsbereich. Er heißt der **Ring der Gaußschen Zahlen**.

b) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ sei $N(z) := z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$, wobei $\overline{z} := x - iy$ die komplexe Konjugation bezeichne. Man zeige: Für $0 \neq z \in \mathbb{C}$ gilt $z^{-1} = \frac{1}{N(z)} \cdot \overline{z}$.

c) Aus Teil b) folgere man: Die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[i]$ ist gegeben als

$$\mathbb{Z}[i]^* = \{z \in \mathbb{Z}[i]; N(z) = 1\} = \{\pm 1, \pm i\}.$$

   Ist $\mathbb{Z}[i]$ ein Körper?