Bitte beachten Sie: Aufgabe 4 ist eine Präsenzaufgabe und wird **nicht korrigiert**.

Aufgabe 1
Untersuchen Sie die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

Aufgabe 2
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und Φ die von A definierte Bilinearform $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto {}^t xAy$. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$, so dass $G^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{0, \pm 1\}$ ist.

Aufgabe 3
Es seien V ein Euklidischer oder unitärer K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$. Man zeige:

a) Es gilt $V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi)$.

b) Es gilt $\varphi = \varphi^*$ genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Bild}(\varphi)^\perp$.

Aufgabe 4 (0 Punkte)
Es seien K ein Körper, Φ eine nicht-ausgeartete α-Sesquilinearform auf dem endlich erzeugten K-Vektorraum V und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Man zeige:

a) Die Abbildung $^* : \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V)$, $\varphi \mapsto \varphi^*$ ist α-semilinear, und für $\varphi' \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt $(\varphi'\varphi)^* = \varphi^*\varphi'^*$. Ist Φ is hermitesch, so ist $\varphi^{**} = \varphi$.

b) Es gilt $\det(\varphi^*) = \det(\varphi)^\alpha$ und $\mathrm{Rang}(\varphi^*) = \mathrm{Rang}(\varphi)$. Insbesondere ist also φ genau dann invertierbar, wenn φ^* invertierbar ist; in diesem Fall gilt $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

c) Es gilt $\mathrm{Kern}(\varphi^*) = {}^\perp\mathrm{Bild}(\varphi)$ und $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Bild}(\varphi^*)^\perp$. Ist $U \leq V$ φ-invariant, so ist ${}^\perp U$ φ^*-invariant; und ist $U \leq V$ φ^*-invariant, so ist $U^\perp$ φ-invariant.