Bitte beachten Sie: Aufgabe 4 ist eine Präsenzaufgabe und wird **nicht korrigiert**.

Aufgabe 1
Es sei $\mathbb{R}^n$, für $n \in \mathbb{N}_0$, versehen mit dem Standardskalarprodukt.

a) Man berechne die zur $\mathbb{R}$-Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gehörige Gram-Schmidt-Basis.

b) Es sei $U := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0\} \leq \mathbb{R}^n$. Man berechne $\mathbb{R}$-Orthonormalbasen von U und von $U^\perp \leq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2
Es seien K ein Körper, Φ eine hermitesche α-Sesquilinearform auf dem K-Vektorraum V, wobei für $\alpha = \mathrm{id}_K$ zusätzlich $2 \neq 0 \in K$ vorausgesetzt werde. Man zeige: Φ ist bereits durch die zugehörige quadratische Form $q : V \to K$, $v \mapsto \Phi(v, v)$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3
Es seien $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein endlich erzeugter normierter K-Vektorraum mit Norm $|| \cdot ||$. Man zeige:

a) Ist V Euklidisch, so gilt der **Cosinus-Satz**: Für $0 \neq v, w \in V$ mit Zwischenwinkel $0 \leq \omega \leq \pi$ gilt $||v - w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 - 2\cos(\omega) \cdot ||v|| \cdot |||w||$. Welcher Spezialfall ergibt sich im Falle $v \perp w$?

b) Ist V Euklidisch oder unitär, so gilt die **Parallelogramm-Gleichung von von Neumann**: Für alle $v, w \in V$ gilt $||v - w||^2 + ||v + w||^2 = 2(||v||^2 + ||w||^2)$. Welche geometrische Interpretation hat diese Gleichung?

c) Gilt umgekehrt in V die Parallelogramm-Gleichung, so ist V Euklidisch bzw. unitär.

d) Es sei $V := K^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, und für $v = [a_1, \ldots, a_n] \in V$ seien $|||v||_1 := \sum_{i=1}^n |a_i|$ die 1-**Norm** und $||v||_\infty := \max\{|a_i| \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ die ∞-**Norm**. Man zeige: Mit $|| \cdot ||_1 : V \to \mathbb{R}$ und $|| \cdot ||_\infty : V \mapsto \mathbb{R}$ wird V jeweils zu einem normierten K-Vektorraum, aber für $n \geq 2$ nicht zu einem euklidischen Vektorraum.

Hinweis: Benutzen Sie für Teil c) das Ergebnis von Aufgabe 2. Benutzen Sie für Teil d) den Aufgabenteil c).

Aufgabe 4 (0 Punkte)
Man bestimme die Signatur der $\mathbb{R}$-Bilinearformen auf $V := \mathbb{R}^n$, wobei $n \geq 2$, deren Gram-Matrizen $(a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezüglich der $\mathbb{R}$-Standardbasis von V wie folgt gegeben sind, und gebe jeweils $V^\perp$ und eine $\mathbb{R}$-Orthogonalbasis an:

a) $a_{ii} := 2$, und $a_{ij} := -1$ für $|i - j| = 1$, und $a_{ij} := 0$ sonst.

b) $a_{ii} := 2$, und $a_{ij} := -1$ für $|i - j| \in \{1, n - 1\}$, und $a_{ij} := 0$ sonst.

c) $a_{ii} := 1$, und $a_{ij} := -1$ für $|i - j| = 1$, und $a_{ij} := 0$ sonst.