Übungen zur Linearen Algebra II — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 11 — PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis 11.01.2018, 16 Uhr — M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte beachten Sie: Aufgabe 4 ist eine Präsenzaufgabe und wird **nicht korrigiert**.

Aufgabe 1
Überprüfen Sie, ob durch die folgenden Abbildungen eine Bilinearform auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definiert wird. Geben Sie in diesem Fall die Gram-Matrix bezüglich der Standard-Basis des $\mathbb{R}^2$ und bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ an.

a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad ((x_1, x_2)^{\mathrm{tr}}, (y_1, y_2)^{\mathrm{tr}}) \mapsto 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$

b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad ((x_1, x_2)^{\mathrm{tr}}, (y_1, y_2)^{\mathrm{tr}}) \mapsto 4x_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1.$

c) $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad ((x_1, x_2)^{\mathrm{tr}}, (y_1, y_2)^{\mathrm{tr}}) \mapsto 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2.$

Welche dieser Abbildungen definiert sogar ein Skalarprodukt?

Aufgabe 2
Betrachten Sie den Untervektorraum $U = \langle (1, 2, 3, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0) \rangle$ des $\mathbb{R}^5$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

b) Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt Φ mit $U^\perp = \langle e_1, e_3, e_5 \rangle$ gibt.

c) Zeigen Sie, dass es ein Skalarprodukt Φ mit $U^\perp = \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$ gibt.

Aufgabe 3
Es seien $[K, \alpha] \in \{[\mathbb{R}, \mathrm{id}], [\mathbb{C}, \bar{\ }]\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Man betrachte erneut die α-Sesquilinearform $\Phi(A, B) := \mathrm{Spur}(A^\alpha B) \in K$ auf $V = K^{n \times n}$ von Blatt 10, Aufgabe 3.

a) Ist Φ ein Skalarprodukt?

b) Man zeige: Durch $\Psi(A, B) := \mathrm{Spur}(A^* B)$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert. Was passiert mit der direkten Zerlegung $V = U_1 \oplus U_{-1}$ aus Aufgabe 3b)?

Aufgabe 4 (0 Punkte)
Es seien K ein Körper, Φ eine α-Sesquilinearform auf dem endlich erzeugten K-Vektorraum V, sowie I eine Menge und $U_i \leq V$ für $i \in I$. Man zeige:

a) Es gilt $(\sum_{i \in I} U_i)^\perp = \bigcap_{i \in I} U_i^\perp$.

b) Ist Φ nicht-ausgeartet, so gilt $(\bigcap_{i \in I} U_i)^\perp = \sum_{i \in I} U_i^\perp$.

Wir wünschen allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Patrizio Bifulco Frederic Hein Bastian Wittkowski Lucas Ruhstorfer Jürgen Müller