**Übungen zur Linearen Algebra I** Bergische Universität Wuppertal
Blatt 8 Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 16.06.2016, 10 Uhr M.Sc. Lucas Ruhstorfer

## Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Zeilenrang der folgenden reellen Matrizen durch Berechnung einer Basis des Zeilenraums:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ -6 & -4 & -10 & -14 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 & -2 & 1 \\ -2 & b & 5 & b & -2 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

## Aufgabe 2

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit $\dim V = 5$. Seien $V_1$ und $V_2$ Untervektorräume von $V$ mit $\dim V_1 = 3$ und $\dim V_2 = 4$.

a) Welchen Wert kann $\dim(V_1 \cap V_2)$ annehmen?

b) Geben Sie für jeden Wert ein explizites Beispiel an.

## Aufgabe 3

Seien $V_1, V_2, \ldots, V_r$ Untervektorräume eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\sum_{i=1}^{r} V_i = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$.

b) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ gilt $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$.

c) $\dim(\sum_{i=1}^{r} V_i) = \sum_{i=1}^{r} \dim(V_i)$.

## Aufgabe 4

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Für eine Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren von $V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

   (i) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

(ii) $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein Erzeugendensystem.

(iii) $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis.

b) Seien $V_1$, $V_2$ und $V_3$ Untervektorräume von $V$, so dass $V_i \cap V_j = \{0\}$ für alle $i \neq j$ gilt. Dann ist $\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 = \dim(V_1 + V_2 + V_3)$.