Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 7
Abgabe bis 09.06.2016, 10 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{Q}$. Betrachten Sie im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V := \mathbb{Q}^3$ die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ ist die Familie (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig?

b) Bestimmen Sie die Dimension von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Untervektorräume V des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$:

a) $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

b) $V = V_1 + V_2$ mit $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

c) $V = V_1 \cap V_2$ mit $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

d) $V = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4 \mid v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0\}$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig?

a) $L_1 = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_1)$

b) $L_2 = (v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_4, v_1 + v_3 + v_4, v_2 + v_3 + v_4)$

Die Antwort hängt davon ab, ob in dem Körper $1 + 1 = 0$ oder $1 + 1 + 1 = 0$ gilt oder nicht.

Aufgabe 4

Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängige Vektoren, so dass je $n-1$ dieser Vektoren linear unabhängig sind. Zeigen Sie:

a) Es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$.

b) Gilt für $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ ebenfalls $\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = 0$, so gibt es ein $\beta \in K$ mit $\mu_i = \lambda_i \cdot \beta$ für alle $i = 1, \ldots, n$.