Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 6 | Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 02.06.2016, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie den Lösungsraum des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:
$$\begin{pmatrix} [1] & [2] & [3] \\ [3] & [4] & [5] \\ [5] & [6] & [7] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [7] \\ [8] \\ [9] \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
$$\begin{pmatrix} [4] & [2] & [3] \\ [1] & [3] & [2] \\ [1] & [3] & [4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie folgende Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie alle unverlängerbaren linear unabhängigen Teilfamilien $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{B}$.

c) Stellen Sie für jede dieser Teilfamilien $\mathcal{B}'$ die Vektoren aus $\mathcal{B} \backslash \mathcal{B}'$ als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}$ dar. Warum ist das möglich?

Aufgabe 3

Sei X eine Menge und sei K ein Körper. Sei $M(X, K)$ die Menge der Abbildungen von X nach K. Sei $+ : M(X,K) \times M(X,K) \to M(X,K)$ gegeben durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und sei $\cdot : K \times M(X,K) \to M(X,K)$ gegeben durch $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in X$. Weiter sei für jedes $y \in X$ die Abbildung $e_y \in M(X,K)$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \neq y \\ 1, & \text{wenn } x = y \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

a) $M(X,K)$ ist ein K-Vektorraum.

b) Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$ mit $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$, so ist die Familie $(e_{y_1}, e_{y_2}, \ldots, e_{y_n})$ linear unabhängig in $M(X,K)$. Folgern Sie daraus, dass $M(X,K)$ genau dann ein endliches Erzeugendensystem hat, wenn X endlich ist.

c) Die Elemente sin, cos, exp des $\mathbb{R}$-Vektorraum $M(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind linear unabhängig. Dabei sind $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ und $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Falls $u, v \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren sind, dann sind auch $u + v$ und $u - v$ linear unabhängig.

b) Sei U ein Untervektorraum von V und $0 \neq u \in U$ und $v \in V \setminus U$. Dann sind u und v linear unabhängig.

c) Die Elemente $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind linear unabhängig im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

d) Die Elemente $\sqrt{2}$ und $\sqrt{8}$ sind linear unabhängig im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.