Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist:

a) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \frac{1}{\lambda} v_2 \end{pmatrix}$ falls $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$, falls $\lambda = 0$.

b) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$.

c) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + 2w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Sei U_1 der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren $(1, 1, 0, 0)$ und $(1, 2, 4, 0)$ erzeugt wird. Ferner sei

$$U_2 = \{(x_1, \ldots, x_4) \mid x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass U_2 ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Berechnen Sie $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Lösungsraum der folgenden linearen Gleichungssysteme über den reellen Zahlen:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \\ 12 \\ 2c \end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von } c \in \mathbb{R},$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und $m,\ n \geq 1$. Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix die nicht gleich der Nullmatrix ist, $B \in K^{m\times n}$ eine weitere Matrix und $b \in K^m$ ein Vektor. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Falls $m = 1$ ist, dann besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ immer eine Lösung.

b) Falls $n = 1$ ist, dann besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ immer eine Lösung.

c) Falls $A \cdot v = B \cdot v$ für ein $0 \neq v \in K^n$, dann gilt $A = B$.

d) Falls $A \cdot v = B \cdot v$ für alle $0 \neq v \in K^n$, dann gilt $A = B$.