Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 4 | Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 12.05.2016, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Name und Matrikel-Nummer auf Ihre Abgabe!

Aufgabe 1

Im Folgenden sei immer $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$?

a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$

b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt ein } i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ mit } x_i = 0\}$

c) $U_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i = x_n\right\}$

d) $U_4 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\right\}$

Begründen Sie ihre Aussagen.

Aufgabe 2

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mithilfe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu konstruieren. Dazu gehen wir wie folgt vor. Betrachten Sie auf der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Zeigen Sie:

a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Auf der Menge der Äquivalenzklassen $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})/\sim$ sind die Verknüpfungen

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} := \overline{(ad + bc, bd)} \text{ und}$$

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} := \overline{(ac, bd)}$$

wohldefiniert und $((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})/\sim, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Der Körper $((\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\sim, +, \cdot)$ entspricht dem Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ der rationalen Zahlen, indem man die Restklasse $\overline{(a, b)}$ mit der rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ identifiziert.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei $v \in V$ ein Vektor und $\lambda \in K$ ein Skalar. Zeigen Sie folgende Rechenregeln:

a) $0_K \cdot v = 0_V$.

b) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$.

c) $\lambda \cdot v = 0_V \Rightarrow v = 0_V$ oder $\lambda = 0_K$.

d) $(-1) \cdot v = -v$.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

b) Es gibt einen Körper mit 4 Elementen.

c) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Seien U, W zwei K-Untervektorräume von V. Dann ist $W \cup U$ genau dann ein K-Untervektorraum von V wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$.

d) Jeder nullteilerfreie kommutative Ring ist ein Körper.