Übungen zur Linearen Algebra I — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 2 — Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 28.04.2016, 10 Uhr — M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien A, B zwei Teilmengen von Y. Zeigen Sie folgende Aussagen.

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

d) $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$

Aufgabe 2

Gegeben seien Mengen A, B und C sowie Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Beweisen Sie:

a) Sind f und g surjektiv (bzw. injektiv), so ist $g \circ f$ surjektiv (bzw. injektiv).

b) Ist $g \circ f$ surjektiv (bzw. injektiv), so ist g surjektiv (bzw. f injektiv).

c) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

d) Sei $A = C$. Konstruieren Sie ein Beispiel, in dem $g \circ f$ bijektiv ist, aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind:

a) $f(x, y) = (x + y, y + 2)$

b) $f(x, y) = (xy, x + y)$

c) $f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2)$

d) $f(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}})$

Aufgabe 4

Überprüfen Sie, ob folgende Relationen $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der angegebenen Menge M definieren. Wenn ja, bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen und beschreibe sie.

a) Sei $M = \mathbb{Z}$ und definiere $a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$.

b) Sei $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und definiere $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow$ es existieren $k, l \in \mathbb{Z}$, so dass $(a, b) = (c, d) + k(2, 0) + l(3, 3)$.

c) Sei $M = \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Definiere $a \sim b \Leftrightarrow a = b$ oder $a \cdot b = n$.

d) Sei $M = \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Definiere $a \sim b \Leftrightarrow a$ und b haben den gleichen Rest bei der Division mit m.