Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

a) Betrachen Sie folgende Permutationen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_5, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in S_8.$$

Schreiben Sie σ und τ als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie das Signum.

b) Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt r-Zykel, wenn es paarweise verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_r \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit

$$\begin{aligned} \pi(a_i) &= a_{i+1} \text{ für } i = 1, \ldots, r-1 \\ \pi(a_r) &= a_1 \end{aligned}$$

und π alle übrigen Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ fest lässt. Bestimmen Sie das Signum für einen r-Zykel $\pi \in S_n$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie für $x \in K$ die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \ldots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & x^2 & & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Zeigen Sie, dass $\det(A(x)) = (1 - x^n)^{n-1}$ ist.

Aufgabe 3

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt Permutationsmatrix, wenn in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 steht und sonst 0.
Für jedes $\sigma \in S_n$ definiere die Matrix $P_\sigma \in K^{n \times n}$ durch

$$(P_\sigma)_{ij} := \begin{cases} 1, \text{ falls } i = \sigma(j) \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) $\{P_\sigma \mid \sigma \in S_n\}$ ist die Menge aller $(n \times n)$-Permutationsmatrizen über K.

b) Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $P_\sigma \cdot P_\tau = P_{\sigma\tau}$.

c) Für jedes $\sigma \in S_n$ ist die Matrix P_σ invertierbar, und es gilt $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^t$.

d) Die Menge aller $(n \times n)$-Permutationsmatrizen über K ist eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_n(K)$.

e) $\det P_\sigma = \operatorname{sign}(\sigma)$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$