Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(x, y, z) \mapsto (-5x - 18y - 24z, 4x + 13y + 16z, -2x - 6y - 7z).$$

Es seien $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ und $\mathcal{B}' = ((3, 1, 0), (1, 1, 1), (3, 2, 1))$ Basen von $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ und $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

b) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.

c) Zeigen Sie $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper mit $1+1 \neq 0$. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt symmetrisch, falls $A^t = A$, und schiefsymmetrisch, falls $A^t = -A$. Zeigen Sie:

a) Die Menge S der symmetrischen Matrizen ist ein Unterraum von $K^{n\times n}$ mit $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$. Geben Sie eine Basis an.

b) Die Menge T der schiefsymmetrischen Matrizen ist ein Unterraum von $K^{n\times n}$ mit $\dim T = \frac{n(n-1)}{2}$. Geben Sie eine Basis an.

c) Es gilt $K^{n\times n} = S \oplus T$.

Aufgabe 3

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 9 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1-a^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a und gegebenfalls die inverse Matrix durch von $A(a)$ durch gleichzeitige elementare Zeilenoperationen auf $A(a)$ und der 4×4-Einheitsmatrix E_4.

b) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Erhält man B^{-1} auch durch gleichzeitige elementare Spaltenumformungen auf B und E_n? Kann man sogar nach Belieben Zeilen- und Spaltenumformungen verwenden?

Aufgabe 4

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine kleinste positive ganze Zahl b mit $\operatorname{Bild}(f^b) = \operatorname{Bild}(f^{b+1})$. Es gilt $\operatorname{Bild}(f^b) = \operatorname{Bild}(f^{b+n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Es gibt eine kleinste positive ganze Zahl c mit $\operatorname{Kern}(f^c) = \operatorname{Kern}(f^{c+1})$. Es gilt $\operatorname{Kern}(f^c) = \operatorname{Kern}(f^{c+n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Zudem gilt $b = c$.

d) Es ist $V = \operatorname{Kern}(f^c) \oplus \operatorname{Bild}(f^c)$.