Übungen zur Linearen Algebra I — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 10 — Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 30.06.2016, 10 Uhr — M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

a) Gegeben seien die folgenden Matrizen A, B, C über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von je zwei der genannten Matrizen.

b) Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt nilpotent, wenn es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $f^l = 0$ gibt. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt nilpotent, wenn es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $A^l = 0$ gibt. Zeigen Sie:

(i) Für jeden Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ und jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{Bild}(f^{i+1}) \subseteq \mathrm{Bild}(f^i)$.

(ii) Sei V ein n-dimensinaler Vektorraum. Dann gilt $f^n = 0$ für jeden nilpotenten Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$. Folgern Sie daraus, dass $A^n = 0$ für jede nilpotente Matrix $A \in K^{n\times n}$ gilt.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$f(x, y) = (3x + 3y, 2x - y, -5x + 3y).$$

a) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$, wobei $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ und $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind und berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{A}',\mathcal{B}'}(f)$.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V gilt $M_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

(ii) Es gibt ein $\lambda \in K$, so dass $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 4

Seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen.

a) Sei Z ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass $\dim(f^{-1}(Z)) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim(Z \cap \mathrm{Bild}(f))$.

b) Zeigen Sie, dass $\dim(\mathrm{Kern}(g \circ f)) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim(\mathrm{Kern}(g) \cap \mathrm{Bild}(f))$.