Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 1 | Dr. Thorsten Weist
keine Abgabe | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Seien A, B Mengen. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $A \subseteq B$

(ii) $A \cap B = A$

(iii) $A \cup B = B$

(iv) $A \backslash B = \emptyset$

Aufgabe 2

Seien A, B, C drei Mengen. Zeigen Sie:

a) $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

b) $C\backslash(A \cup B) = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$

c) $C\backslash(A \cap B) = (C\backslash A) \cup (C\backslash B)$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Potenzmengen der folgenden Mengen:

a) $M_1 = \{1, 2, 3\}$

b) $M_2 = \{3, \{1, 4\}\}$

c) $M_3 = \{\}$

d) $M_4 = \{\{\}\}$

Aufgabe 4

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und seien M_1, $M_2 \subseteq A$ und N_1, $N_2 \subseteq B$ Teilmengen. Beweisen Sie:

a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

b) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$.

Aufgabe 5

Geben Sie eine Folge $M_1, M_2, M_3, \ldots$ von Teilmengen von $\mathbb{Z}$ an, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ unendlich ist und für die Menge

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in M_i \text{ für jedes } i \in \mathbb{N}\}$$

gilt $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i = \emptyset$.

Aufgabe 6

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$

c) $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

d) $n^2 < 2^n$ für alle $n \geq 5$

e) 30 teilt $(n^5 - n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 7

Finden und beweisen Sie eine Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

Aufgabe 8

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden $y_1(x) = 2x - 1$ und $y_2(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

b) Geben Sie eine Geradengleichung für das Lot des Punktes $P = (3, 0)$ auf die Gerade $y(x) = 5x + 1$ an und berechnen Sie den Lotfußpunkt.

Aufgabe 9 (Schubladenprinzip)

Falls man eine bestimmte Anzahl von Schubladen hat und mehr Objekte in die Fächer legt als Fächer vorhanden sind, dann landen in irgendeinem Fach mindestens zwei dieser Objekte. Geben Sie einen Beweis für dieses sogenannte "Schubladenprinzip". Beweisen Sie als Anwendung, dass es in München mindestens zwei Personen gibt, die exakt dieselbe Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben.

Aufgabe 10 (Hilberts Hotel)

In einem Hotel mit endlich vielen Zimmern können keine Gäste mehr aufgenommen werden, sobald alle Zimmer belegt sind (Schubladenprinzip). Das Hotel des Mathematikers David Hilbert hat jedoch unendlich viele Zimmer, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind (d.h. die Zimmer haben die Nummern $1, 2, 3, \ldots$). Eines Tages sind alle Zimmer belegt. Kann man durch Umquartieren der Gäste dennoch neue Gäste aufnehmen? Wenn ja, wie würde man vorgehen, wenn

a) ein neuer Gast kommt.

b) n neue Gäste kommen, wobei n eine natürliche Zahl ist.

c) abzählbar unendlich viele Gäste kommen (d.h. wir können die Gäste mit $1, 2, 3, \ldots$ durchnummerieren).

d) abzählbar unendlich viele Busse mit je abzählbar unendlich vielen Gästen kommen.