Übungen zur Linearen Algebra II — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 8 — Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 15.12.2016, 10 Uhr — M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob durch die folgenden Abbildungen eine Bilinearform auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definiert wird. Geben Sie in diesem Fall die darstellende Matrix bezüglich der Basis $((1,1),(1,-1))$ an.

a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$

b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto 4x_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1.$

c) $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2.$

Welche dieser Abbildungen definiert sogar ein Skalarprodukt?

Aufgabe 2

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.

a) Seien $v, w \in V$ mit $w \neq 0$. Setze $L = \{\lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass der Abstand von v zu der Geraden L durch

$$d(v, L) = \frac{1}{||w||}\sqrt{||w||^2||v||^2 - \langle v, w\rangle^2}$$

gegeben ist.

b) Seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V und seien $w_1, w_2 \in V$. Zeigen Sie, dass

$$d(w_1 + U_1, w_2 + U_2) = d(w_1 - w_2, U_1 + U_2).$$

c) Sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden $w_1 + U_1$ bzw. $w_2 + U_2$ mit

$$w_1 = (1,2,0),\ w_2 = (4,1,2),\ U_1 = \langle(1,1,2)\rangle,\ U_2 = \langle(0,0,1)\rangle.$$

Aufgabe 3

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Seien $v,\ w \in V$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) $\langle v + w, v - w\rangle = ||v||^2 - ||w||^2$

b) $||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$

c) $||v - w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 - 2\langle v, w\rangle$

d) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(||v + w||^2 - ||v - w||^2)$

e) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ mit $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq n$. Dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Aufgabe 4

Sei U_2 der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 mit Basis $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Seien $d, e \in \mathbb{R}$ mit $d \leq e$. Zeigen Sie, dass durch

$$s : U_2 \times U_2 \to \mathbb{R}, \quad (P, Q) \mapsto \int_d^e P(t)Q(t)dt$$

eine symmetrische Bilinearform definiert wird und berechnen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(s)$ für $d = 3$ und $e = 4$.