Übungen zur Linearen Algebra II
Blatt 7
Abgabe bis 08.12.2016, 10 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob es Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2016 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B^5 + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ gibt.}$$

Im Fall der Existenz ist es nicht notwendig die Matrix anzugeben.

Aufgabe 2

Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = 1$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) X^{n-1} teilt χ_A.

b) $\operatorname{Spur}(A)$ ist ein Eigenwert von A.

c) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn 0 nicht der einzige Eigenwert von A ist.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Matrizen $K^{n\times n}$ bildet.

b) Beweisen Sie, dass jede triagonalisierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ zu A^T ähnlich ist.

Aufgabe 4

Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) A und B sind genau dann ähnlich, wenn $\chi_A = \chi_B$, $\mu_A = \mu_B$ und $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.

b) Sei $A \in K^{n\times n}$, so dass χ_A über K in Linearfaktoren zerfällt. Die Menge der Matrizen $\mathrm{C}(A) = \{T \in K^{n\times n} \mid AT = TA\}$ bildet einen Untervektorraum des $K^{n\times n}$ und es gilt $\dim \mathrm{C}(A) \geq n$.

Hinweis: Wenn A ähnlich zu B ist, so gilt $\mathrm{C}(A) = \mathrm{C}(B)$.