Übungen zur Linearen Algebra II | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 13 | Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 02.02.2017, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Seien V ein Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $W = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum von V. Sei $\pi : V \to V/U$ die natürliche Abbildung. Zeigen Sie:

a) $(\pi(v_1), \ldots, \pi(v_n))$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist und $U \cap W = \{0\}$.

b) $(\pi(v_1), \ldots, \pi(v_n))$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von V/U, wenn $V = U + W$.

c) $(\pi(v_1), \ldots, \pi(v_n))$ ist genau dann eine Basis von V/U, wenn $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist und $V = U \oplus W$.

d) Seien $V = \mathbb{R}^4$ und $U = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle \subseteq V$. Bestimmen Sie eine Basis von V/U.

Aufgabe 2

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie folgende Aussagen.

a) Die Abbildung
$$d : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*),\ f \mapsto f^*,$$
ist linear.

b) Falls W endlich-dimensional ist, dann ist d injektiv.

c) Falls W und V endlich-dimensional sind, dann ist d bijektiv.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Seien U und U' Unterräume von V. Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Die Abbildung $V \to (V^*)^*$, $x \mapsto (f \mapsto f(x))$, ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

b) Es gilt $U/(U \cap U') \cong (U + U')/U'$.

c) Seien $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und U ein f-invarianter Untervektorraum von V. Dann ist die Abbildung $f_{V/U} : V/U \to V/U$, $x + U \mapsto f(x) + U$, eine wohldefinierte lineare Abbildung.

Aufgabe 4

Sei $V = \mathbb{R}^5$ und U der Untervektorraum von V mit Basis $\mathcal{B}_U = ((1,2,0,0,0),(0,3,2,-1,0))$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : V \to V$, $x \mapsto A \cdot x$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{3}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

a) Zeigen Sie, dass U ein f-invarianter Untervektorraum von V ist und bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}_U}(f\,|_U)$.

b) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}_{V/U} = (c_1, c_2, c_3)$ von V/U und berechnen Sie $M_{\mathcal{B}_{V/U}}(f_{V/U})$.

c) Sei $\pi : V \to V/U$ die natürliche Abbildung. Wählen Sie Vektoren $b_1, b_2, b_3 \in V$ mit $\pi(b_i) = c_i$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V ist und bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}(f)$. Was fällt Ihnen auf?