Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1

Sei S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen von $\{1,\dots,n\}$ nach $\{1,\dots,n\}$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $(S_n,\circ)$, wobei $\circ$ die Verknüpfung von Abbildungen ist, eine Gruppe bildet. Sei $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$ die Menge der Permutationen mit Signum 1.

a) Zeigen Sie, dass $(A_n,\circ)$ eine Untergruppe der $(S_n,\circ)$ ist.

b) Bestimmen Sie die Verknüpfungstafel der $(S_3,\circ)$.

c) Zeigen Sie, dass $(S_3,\circ)$ eine nicht-abelsche Gruppe ist.

d) Bestimmen Sie alle 6 Untergruppen der $(S_3,\circ)$. Sie müssen dabei nicht beweisen, dass dies sämtliche Untergruppen sind.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^2$ zusammen mit der Verknüpfung

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

also der gewöhnlichen Addition von Vektoren.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2,+)$ eine abelsche Gruppe ist. Geben Sie dabei explizit das neutrale Element von $(\mathbb{R}^2,+)$ an und zu jedem Vektor sein inverses Element.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}^2,+)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^2,+)$ ist.

c) Sei $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$. Zeigen Sie, dass $(U,+)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^2,+)$ bildet.

Aufgabe 3

a) Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe mit $g \circ g = e$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass $(G,\circ)$ abelsch ist.

b) Sei $(G,\circ)$ eine abelsche Gruppe mit $G = \{g_1,\dots,g_n\}$. Zeigen Sie die Gleichung

$$(g_1 \circ \dots \circ g_n) \circ (g_1 \circ \dots \circ g_n) = e.$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, welche der folgenden Angaben $(G, \circ)$ eine Gruppe definieren.

a) $G = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ mit $x \circ y = x \cdot y$,

b) $G = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ mit $x \circ y = \frac{x}{y}$,

c) $G = 6\mathbb{Z}$ mit $x \circ y = x + y + 66$,

d) $G = 6\mathbb{Z}$ mit $x \circ y = x + y + 67$.