Übungen zur Linearen Algebra I	Bergische Universität Wuppertal
Blatt 8	Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 22.06.2017, 10 Uhr	M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mithilfe der Cramerschen Regel.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -19 & 12 \\ 0 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 15 & 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mithilfe der Cramerschen Regel die Inverse der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Ist n ungerade und ${}^tA = -A$, so gilt $\det(A) = 0$.

b) Wenn ${}^tA \cdot A = E_n$ ist, so ist $\det(A) \in \{-1, +1\}$.

Aufgabe 4
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

a) Zeigen Sie $\det(E_m + A \cdot B) = \det(E_n + B \cdot A)$.

   Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4c von Blatt 7, um die Determinante der Blockmatrix
$$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ B & E_n \end{pmatrix}$$
   auf zwei unterschiedliche Arten zu berechnen.

b) Betrachten Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Bestimmen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix $E_n + {}^tC \cdot C$.