Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 6
Abgabe bis 01.06.2017, 10 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1

Seien A, B und C Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen Sie:

a) Sind f und g surjektiv (bzw. injektiv), so ist $g \circ f$ surjektiv (bzw. injektiv).

b) Ist $g \circ f$ surjektiv (bzw. injektiv), so ist g surjektiv (bzw. f injektiv).

c) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

d) Sei $A = C$. Konstruieren Sie ein Beispiel, in dem $g \circ f$ bijektiv ist, aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

Aufgabe 2

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Wie in Aufgabe 3 auf Blatt 4 bezeichnen wir mit

$$L_{A,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Die Matrix A ist invertierbar.

b) Für alle $c \in \mathbb{R}^n$ ist $|L_{A,c}| = 1$.

c) Es gilt $L_{A,\mathbb{O}} = \{\mathbb{O}\}$.

d) Für alle $c \in \mathbb{R}^n$ ist $L_{A,c} \neq \emptyset$.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie für welche $b \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_b = \begin{pmatrix} 0 & b^2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und geben Sie in diesen Fällen auch die Inverse der Matrix A_b an.

Aufgabe 4
Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Die Matrix $A \cdot B$ ist genau dann invertierbar, wenn $B \cdot A$ invertierbar ist.

b) Wenn es eine natürliche Zahl $k > 0$ mit $C^k = \mathbb{O}$ gibt, so ist die Matrix $E_n - C$ invertierbar mit $(E_n - C)^{-1} = E_n + C + C^2 + \cdots + C^{k-1}$.

c) Wenn $C^2 = E_n$ ist, so ist C eine Diagonalmatrix.

d) Sei $n = m$. Dann gilt $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$.

Aufgabe 5
Überprüfen Sie welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

a) $f(x, y) = (x + y, y + 2)$,

b) $f(x, y) = (xy, x + y)$,

c) $f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2)$,

d) $f(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}})$.