Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1
Seien a, b zwei reelle Zahlen. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + ax_3 &= b. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen des obigen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a, b.

Aufgabe 2
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien A, B zwei Teilmengen von Y. Zeigen Sie folgende Aussagen.

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

d) $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$.

Aufgabe 3

a) Sei $f : A \to B$. Zeigen Sie: Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn für alle Mengen C und alle Abbildungen $g, h : B \to C$ mit $g \circ f = h \circ f$ gilt $g = h$.

b) Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage wie in Teil a) für injektive Abbildungen.

Aufgabe 4

a) Geben Sie eine Folge M_1, M_2, M_3, $\ldots$ von Teilmengen von $\mathbb{Z}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n$ unendlich ist und $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i = \emptyset$ gilt.

b) Definieren Sie unendliche Teilmengen M_1, M_2, M_3, $\ldots$ von $\mathbb{Z}$, so dass $M := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid A = M_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ eine Partition von $\mathbb{Z}$ ist.