Übungen zur Linearen Algebra I	Bergische Universität Wuppertal
Blatt 4	Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 18.05.2017, 10 Uhr	M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1

a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenfalls die inverse Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Lösungsraum der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \\ 12 \\ 2c \end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von } c \in \mathbb{R},$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 3

Seien A eine $m \times n$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Wir bezeichnen mit

$$L_{A,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Wir nehmen an, dass das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ eine Lösung besitzt. Sei nun $x_0 \in L_{A,b}$. Zeigen Sie, dass gilt $L_{A,b} = \{x + x_0 \mid x \in L_{A,\mathbb{O}}\}$.

Aufgabe 4
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix, die nicht gleich der Nullmatrix ist, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine weitere Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Falls $m = 1$ ist, dann besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ immer eine Lösung.

b) Falls $n = 1$ ist, dann besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ immer eine Lösung.

c) Falls $A \cdot v = B \cdot v$ für ein $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ist, dann gilt $A = B$.

d) Falls $A \cdot v = B \cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist, dann gilt $A = B$.