**Übungen zur Linearen Algebra I** | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 3 | Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 11.05.2017, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

**Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.**

## Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

c) Geben Sie Permutationsmatrizen $P_1, P_2 \in R^{3\times 3}$ an, so dass

$$P_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot P_2$$

eine obere Dreiecksmatrix ist.

## Aufgabe 2

Sei $B$ eine $n \times m$-Matrix. Beweisen Sie folgende Aussagen über elementare Spaltenumformungen:

a) Die Matrix $BD^{\lambda,j}$ ist die Matrix, die aus $B$ entsteht, indem man die $j$-te Spalte der Matrix $B$ mit $\lambda$ multipliziert.

b) Die Matrix $BZ_{ij}^{\lambda}$ ist die Matrix, die aus $B$ entsteht, indem man das $\lambda$-fache der $i$-ten Spalte der Matrix $B$ zur $j$-ten Spalte der Matrix $B$ addiert.

c) Die Matrix $B\sigma^{ij}$ ist die Matrix, die aus $B$ entsteht, indem man die $j$-te und $i$-te Spalte der Matrix $B$ vertauscht.

## Aufgabe 3

Für eine quadratische $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ definieren wir

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Seien $A$ und $B$ zwei $n \times n$ Matrizen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$.

b) $\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$.

c) Die Gleichung $A \cdot B - B \cdot A = E_n$ besitzt keine Lösung.

**Aufgabe 4**

a) Betrachten Sie die folgenden Permutationsmatrizen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie $\sigma$ und $\tau$ als Produkt von Transpositionen.

b) Zeigen Sie, dass jede Transposition ein Produkt von einfachen Transpositionen ist. Genauer, sei $k < l$, dann gilt:

$$\sigma^{k,l} = \sigma^{k,k+1} \cdot \sigma^{k+1,k+2} \cdot \ldots \cdot \sigma^{l-2,l-1} \cdot \sigma^{l-1,l} \cdot \sigma^{l-2,l-1} \cdot \ldots \cdot \sigma^{k+1,k+2} \cdot \sigma^{k,k+1}.$$