Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 2 | Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 04.05.2017, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^2, A^3 und A^{2017}.

Hinweis: Ist A eine quadratische $n \times n$ Matrix, so definieren wir $A^0 = E_n$, $A^1 = A$ und

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-mal}}$$

für alle natürlichen Zahlen $n > 1$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Menge $\mathbb{C}$ aller reellen Matrizen der Form

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sind $A, B \in \mathbb{C}$, so ist $A + B \in \mathbb{C}$ und $A - B \in \mathbb{C}$.

b) Es ist $\mathbb{O}, E_2 \in \mathbb{C}$.

c) Sind $A, B \in \mathbb{C}$, so ist $A \cdot B \in \mathbb{C}$ und es gilt $A \cdot B = B \cdot A$.

d) Ist $A \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{O}\}$, so ist A invertierbar und es gilt $A^{-1} \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Rechenregeln:

a) Seien A, B zwei $m \times n$-Matrizen und $\lambda \in R$, so gilt ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ und ${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA$.

b) Seien A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix. Dann gilt ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

c) Sei A eine invertierbare Matrix. Dann ist auch die Matrix ${}^tA$ invertierbar und es gilt $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

d) Seien A eine $n \times n$ Matrix und x ein n-dimensionaler Spaltenvektor. Dann gilt ${}^tx \cdot A \cdot x = {}^tx \cdot {}^tA \cdot x$.

Aufgabe 4

a) Seien $a, b \in R$ zwei reelle Zahlen. Berechnen Sie das Produkt $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

c) Bestimmen Sie eine Formel für $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie diese Formel anschließend mittels vollständiger Induktion.

Hinweis: Bei Teil c) dürfen Sie ohne Beweis die Formel $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ benutzen.