**Übungen zur Linearen Algebra I** | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 12 | Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 20.07.2017, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

**Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.**

**Aufgabe 1**
Bestimmen Sie den Spaltenrang der folgenden reellen Matrix durch Berechnung einer Basis des Spaltenraums.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ -6 & -4 & -10 & -14 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 & -2 & 1 \\ -2 & b & 5 & b & -2 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a$, $b \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2**
Sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit $\dim(V) = 5$. Seien $U_1$ und $U_2$ Untervektorräume von $V$ mit $\dim(U_1) = 3$ und $\dim(U_2) = 4$.

a) Welche Werte kann $\dim(U_1 \cap U_2)$ annehmen?

b) Geben Sie für jeden Wert ein explizites Beispiel an.

**Aufgabe 3**
Seien $U$,$V$, $W$ endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es gilt $\mathrm{Rang}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{Rang}(g), \mathrm{Rang}(f))$.

b) Sei jetzt $U = V = W$. Dann gilt:

$$\mathrm{Rang}(f) - \mathrm{Rang}(g) \leq \mathrm{Rang}(f + g) \leq \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g).$$

**Hinweis:** Für eine lineare Abbildung $f : U \to V$ definieren wir $\mathrm{Rang}(f) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

**Aufgabe 4**

a) Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x+y) \cdot y \\ x+y \end{pmatrix}$

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+1-b \\ 2x+y \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild (inklusive der Dimension) der linearen Abbildung

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 4x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

c) Gibt es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, 3$, wobei $a_i$ und $b_i$ wie folgt gegeben sind?

(i) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}.$

(ii) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$