Übungen zur Linearen Algebra I — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 11 — Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 13.07.2017, 10 Uhr — M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Untervektorräume $U_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und $U_2 = \langle v_3, v_4 \rangle$ des $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Untervektorräume $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 2

Seien X eine Menge und K ein Körper. Sei $M(X,K)$ die Menge der Abbildungen von X nach K. Sei $+ : M(X,K) \times M(X,K) \to M(X,K)$ gegeben durch $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und sei $\cdot : K \times M(X,K) \to M(X,K)$ gegeben durch $(\lambda \cdot g)(x) := \lambda \cdot g(x)$ für alle $x \in X$. Für jedes $y \in X$ sei die Abbildung $e_y \in M(X,K)$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \neq y, \\ 1, & \text{wenn } x = y. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) $M(X,K)$ ist ein K-Vektorraum.

b) Sei $X = \{y_1, \ldots, y_n\}$ eine endliche Menge. Dann bilden die Vektoren $e_{y_1}, \ldots, e_{y_n}$ eine Basis von $M(X,K)$.

c) Die Elemente sin, cos, exp des $\mathbb{R}$-Vektorraums $M(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind linear unabhängig. Dabei sind $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ und $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$.

Aufgabe 3

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Seien $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängige Vektoren in V.

a) Zeigen Sie, dass die $n+1$ Vektoren $x_1, \ldots, x_n, x_1 + \cdots + x_n$ linear abhängig sind, aber je n dieser Vektoren linear unabhängig sind.

b) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ beliebig. Wir definieren $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Beweisen Sie, dass die Vektoren $x_1 - x, \dots, x_n - x$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 1$ gilt.

Aufgabe 4
Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für zwei Untervektorräume U_1 und U_2 von V die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

b) $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

c) Für jede Basis $\mathcal{B}_1$ von U_1 und jede Basis $\mathcal{B}_2$ von U_2 ist $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 + U_2$.

d) Für alle $u \in U_1 + U_2$ existieren eindeutig bestimmte $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $u = u_1 + u_2$.