Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$?

a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$,

b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt ein } i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } x_i = 0\}$,

c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=2}^{n} x_i = x_1\}$,

d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Entscheiden Sie in den folgenden Fällen, ob $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

a) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \frac{1}{\lambda} v_2 \end{pmatrix}$, falls $\lambda \neq 0$ und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, falls $\lambda = 0$.

b) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 \cdot w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}$.

c) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + 2 \cdot w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ferner seien U und W Untervektorräume von V. Dann ist $U \cup W$ genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind.

b) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$ linear abhängig über $\mathbb{R}$?

c) Zeigen Sie, dass 1, i und $\sqrt{2}$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{C}$ sind.