Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Welche Matrizen können in welcher Reihenfolge miteinander addiert werden? Berechnen Sie falls möglich die Summe der Matrizen.

b) Welche Matrizen können in welcher Reihenfolge miteinander multipliziert werden? Berechnen Sie falls möglich das Matrixprodukt.

c) Betrachten Sie die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Ausdrücke $C \cdot (B \cdot y)$, $A \cdot x + D \cdot x$ und $A \cdot x + B \cdot y$.

Aufgabe 2

Sei λ eine reelle Zahl. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ \lambda - 1 + 3x_2 &= -x_1 \\ x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des obigen Gleichungssystems in Abhängigkeit von λ.

b) Überführen Sie das lineare Gleichungssystem in eine Form $A \cdot x = b$.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{S}$ die Menge aller reellen 2×2 Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc = 1$.

a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Elemente aus $\mathbb{S}$ wieder in $\mathbb{S}$ liegt.

b) Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{S}$. Beweisen Sie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Seien A und B zwei reelle $n \times n$-Matrizen. Beweisen Sie folgenden Aussagen oder widerlegen Sie sie, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

a) Es gilt $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Wenn A und B obere Dreiecksmatrizen sind, so ist auch $A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix.