Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 9
Abgabe bis 21.06.2018, 10 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte beachten Sie, dass alle Lösungen ausreichend zu begründen sind!

Aufgabe 1

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei $A'_{i,j}$ die Matrix die aus A entsteht, indem man die i-te Zeile und die j-te Spalte aus A streicht. Man betrachte die zu A *adjunkte Matrix* $\tilde{A}$, die durch

$$\tilde{A}_{i,j} := (-1)^{i+j} \det(A'_{j,i}).$$

gegeben ist. Ziel der Aufgabe ist es die Gleichung

$$A \cdot \tilde{A} = \det(A) E_n$$

zu beweisen. Dazu gehe man wie folgt vor:

a) Sei $\hat{A}_{i,j}$ die Matrix die aus A entsteht, indem man die i-te Zeile von A durch ε_j ersetzt. Man zeige, dass $\det(\hat{A}_{i,j}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{i,j})$.

b) Man folgere aus Teil a), dass $(A\tilde{A})_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot \det(\hat{A}_{k,j})$.

c) Man nutze die Eigenschaften der Determinante aus um

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot \det(\hat{A}_{k,j}) = \delta_{k,i} \cdot \det(A)$$

zu zeigen.

d) Nun folgere man, dass $A \cdot \tilde{A} = \det(A) E_n$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Adjunkte der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Entscheiden Sie, ob die Matrizen aus Teil a) invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenfalls ihr Inverses.

Aufgabe 3
Berechnen Sie in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b \\ b & & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Aufgabe 4
Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn für alle $i > j$ gilt $A_{i,j} = 0$. Beweisen Sie: Ist A eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist, dann ist auch A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe für 4 Punkte)
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

a) Zeigen Sie, dass $\det(E_m + A \cdot B) = \det(E_n + B \cdot A)$.

   Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 5b von Blatt 8, um die Determinanten der Blockmatrizen
   $$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ B & E_n \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} E_n & B \\ -A & E_m \end{pmatrix}$$
   zu berechnen.

b) Betrachten Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Bestimmen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix $E_n + {}^tC \cdot C$.