Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 7
Abgabe bis 07.06.2018, 10 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Übungsgruppe, in welche Sie eingeteilt wurden, auf ihre Abgabe.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & s & s \\ t & 0 & s \\ t & t & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2s \\ t+s \\ 2t \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $s, t \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie für $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ das Inverse der Matrix $C \cdot {}^tC$.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass jede Transposition ein Produkt von einfachen Transpositionen ist. Genauer, sei $k < l$, dann gilt:

$$\sigma^{k,l} = \sigma^{k,k+1} \cdot \sigma^{k+1,k+2} \cdot \ldots \cdot \sigma^{l-2,l-1} \cdot \sigma^{l-1,l} \cdot \sigma^{l-2,l-1} \cdot \ldots \cdot \sigma^{k+1,k+2} \cdot \sigma^{k,k+1}.$$

b) Betrachen Sie folgende Permutationen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_5, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in S_8.$$

Bestimmen Sie die dazugehörigen Permutationsmatrizen P_{σ_1} und P_{σ_2}.

c) Schreiben Sie σ_1 und σ_2 als Produkt von **einfachen** Transpositionen.

Aufgabe 3

Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt *r-Zykel*, wenn es paarweise verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_r \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit

$$\pi(a_i) = a_{i+1} \text{ für } i = 1, \ldots, r-1$$
$$\pi(a_r) = a_1$$

und π alle übrigen Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ fest lässt.

a) Zeigen Sie, dass für jeden r-Zykel $\pi \in S_n$ gilt $\pi^r = \mathrm{id}$ und $\pi^i \neq \mathrm{id}$ für alle $1 < i < r$.

b) Betrachten Sie die Permutation

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Zeigen Sie, dass $\tau_1^6 = \tau_2^6 = \mathrm{id}$ gilt.

Aufgabe 4

Sei A eine $n \times n$ Matrix. Sei $z_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ die i-te Zeilensumme. Zeigen Sie:

a) Ist $z_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $\det(A) = 0$.

b) Ist $z_i = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $\det(A - E_n) = 0$.

c) Gibt es eine entsprechende Aussage für Spaltensummen statt Zeilensummen?