Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 5
Abgabe bis 17.05.2018, 10 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Übungsgruppe, in welche Sie eingeteilt wurden, auf ihre Abgabe.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

c) Geben Sie Permutationsmatrizen $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, so dass

$$P_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot P_2$$

eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgende Rechenregeln:

a) Seien A, B zwei $m \times n$-Matrizen und $\lambda \in R$, so gilt ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ und ${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA$.

b) Seien A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix. Dann gilt ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

c) Sei A eine invertierbare Matrix. Dann ist auch die Matrix ${}^tA$ invertierbar und es gilt $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

d) Seien A eine $n \times n$ Matrix und x ein n-dimensionaler Spaltenvektor. Dann gilt ${}^tx \cdot A \cdot x = {}^tx \cdot {}^tA \cdot x$.

Aufgabe 3

a) Betrachten Sie die folgenden Permutationsmatrizen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie σ und τ als Produkt von Transpositionen.

b) Berechnen Sie σ^{-1} und τ^{-1}.

c) Schreiben Sie σ^{-1} und τ^{-1} als Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 4

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + x_3 &= ab \\ -2x_1 + bx_2 + ax_3 &= -b \\ bx_2 + (a+1)x_3 &= b \end{aligned}$$

außer $\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ noch weitere Lösungen? Bestimmen Sie alle Lösungen.

b) Es sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $L_{A,b} = \emptyset$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \in L_{A,c}$ gilt.