Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Übungsgruppe, in welche Sie eingeteilt wurden, auf ihre Abgabe.

Aufgabe 1
Sei $a \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystem.

Aufgabe 2
Betrachten Sie die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie A^2, A^3 und A^{2018}.

Hinweis: Ist A eine quadratische $n \times n$ Matrix, so definieren wir $A^0 = E_n$, $A^1 = A$ und

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-mal}}$$

für alle natürlichen Zahlen $n > 1$.

Aufgabe 3
Betrachten Sie die Menge $\mathbb{C}$ aller reellen Matrizen der Form

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es sei $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sind $A, B \in \mathbb{C}$, so ist $A + B \in \mathbb{C}$ und $A - B \in \mathbb{C}$.

b) Es ist $0, E_2 \in \mathbb{C}$.

c) Sind $A, B \in \mathbb{C}$, so ist $A \cdot B \in \mathbb{C}$ und es gilt $A \cdot B = B \cdot A$.

d) Ist $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist A invertierbar und es gilt $A^{-1} \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen. Berechnen Sie das Produkt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

c) Bestimmen Sie eine Formel für $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie diese Formel anschließend mittels vollständiger Induktion.

Hinweis: Bei Teil c) dürfen Sie ohne Beweis die Formel $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ benutzen.