Übungen zur Linearen Algebra I — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 3 — Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 03.05.2018, 10 Uhr — M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Übungsgruppe, in welche Sie eingeteilt wurden, auf ihre Abgabe.

Aufgabe 1
Betrachten Sie die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Entscheiden Sie, ob die Matrizen A_i und A_j addiert werden könnnen und bestimmen Sie falls möglich die Summe $A_i + A_j$.

b) Entscheiden Sie, ob die Matrizen A_i und A_j miteinander multipliziert werden könnnen und bestimmen Sie falls möglich das Produkt $A_i \cdot A_j$.

c) Betrachten Sie die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Ausdrücke $A_3 \cdot (A_2 \cdot y)$, $A_1 \cdot x + A_4 \cdot x$ und $A_1 \cdot x + A_2 \cdot y$.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden reellen linearen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \\ 12 \\ 2c \end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von } c \in \mathbb{R},$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 3
Für eine quadratische $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definieren wir

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei $n \times n$ Matrizen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$.

b) $\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$.

c) Die Gleichung $A \cdot B - B \cdot A = E_n$ besitzt keine Lösung.

Aufgabe 4
Drei Mathematiker trinken zusammen 100 Tassen Kaffee und eine unbekannte Anzahl an Tassen Tee.

a) Der erste Mathematiker trinkt genau so viel Kaffee wie Tee.

b) Der zweite Mathematiker trinkt die Hälfte aller Tassen Tee. Außerdem trinkt er genau so viel Kaffee wie die beiden anderen Mathematiker zusammen.

c) Der dritte Mathematiker trinkt keinen Tee, dafür aber zehn Tassen Kaffee mehr als der erste Mathematiker.

Wieviele Tassen Tee trinken die drei Mathematiker zusammen?