Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 2 | Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 26.04.2018, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1
Überprüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 4x + 4$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 6$

c) $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 3x - 6$

d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (x, 2x - 1)$

Aufgabe 2
Seien A, B und C Mengen. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen Sie:

a) Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

c) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

d) Konstruieren Sie ein Beispiel, in dem $g \circ f$ bijektiv ist, aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

Aufgabe 3
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 - x_1 \\ 2x_2 - x_3 &= -x_4 + 4 \\ 3x_4 - x_3 - 1 &= x_4. \end{aligned}$$

a) Überführen Sie das lineare Gleichungssystem in eine Form $A \cdot x = b$.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen des obigen Gleichungssystems.

Aufgabe 4
Seien $n, m \geq 1$. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix, die ungleich der Nullmatrix ist, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine weitere Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Falls $n = 1$ ist, dann besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ immer eine Lösung.

b) Falls $m = 1$ ist, dann besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ immer eine Lösung.

c) Falls $A \cdot x = B \cdot x$ für ein $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ist, so gilt $A = B$.

d) Falls $A \cdot x = B \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist, so gilt $A = B$.