Bitte beachten Sie, dass alle Lösungen ausreichend zu begründen sind!

Aufgabe 1

Sei $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren reellen $n \times n$ Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

eine Untergruppe der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bildet.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $U := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A_{i,j} = 0 \text{ für alle } 1 \leq j < i \leq n\}$ der oberen Dreiecksmatrizen eine Untergruppe der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bildet.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$?

a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Q} \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\}$,

b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt ein } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } x_i = 0\}$,

c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=2}^{n} x_i = x_1\}$,

d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$.

Hierbei sei jeweils $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, also $x_1, \ldots, x_n$ die Koordinaten des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3

Entscheiden Sie in den folgenden Fällen, ob $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

a) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \frac{1}{\lambda} v_2 \end{pmatrix}$, falls $\lambda \neq 0$ und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, falls $\lambda = 0$.

b) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 \cdot w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}$.

c) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + 2 \cdot w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ferner seien U und W Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass $U \cup W$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.