Prof. Dr. Britta Späth
MSc Lucas Ruhstorfer

12. August 2017

Klausur zur Linearen Algebra 1

Nummer: 1

Bitte tragen Sie die folgenden Daten lesbar und in Blockschrift ein:

Name:

Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Max. Punktzahl	8	8	8	8	12	8
Erreichte Punktzahl						

Gesamtpunktzahl (52 Punkte):

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Mit 28 Punkten ist die Klausur sicher bestanden.

Schreiben Sie auf jeden Klausurbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!

Es gelten die Notationen aus der Vorlesung. Alle Beweis- und Rechenschritte müssen erläutert werden.

Aufgabe 1
Seien V und W zwei K-Vektorräume für einen Körper K.

a) Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ linear?

b) Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ injektiv?

c) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie $f(0_V) = 0_W$.

d) Beweisen Sie: Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt:
f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\det(A^3)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Berechnen Sie für $\mu \in \mathbb{R}$ die Determinante von $B_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mu & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

c) Entscheiden Sie, ob die Matrix $C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenfalls ihr Inverses.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\dim U_2$.

c) Entscheiden Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4
Seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und $b_\mu \in \mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b_\mu = \begin{pmatrix} \mu \\ 3+\mu \\ 1-\mu \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A und $(A \mid b_\mu)$ in Abhängigkeit von μ.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge L_{A,b_μ} des linearen Gleichungssystems $Ax = b_\mu$ in Abhängigkeit von μ.

c) Gibt es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$, so dass $L_{A,c} = \emptyset$? Falls ja, geben Sie einen solchen Vektor an.

Aufgabe 5
Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. (1 Punkt je Aufgabenteil) **Begründen** Sie Ihre Antwort, indem Sie die Aussage beweisen oder widerlegen. (2 Punkte je Aufgabenteil)

a) Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \det(A)$.

b) Wenn $m > n$ ist, dann gibt es eine surjektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

c) Die Menge $U := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ bildet eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

d) Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $A \cdot B = \mathbb{O}$ genau dann, wenn $B \cdot A = \mathbb{O}$.

Aufgabe 6
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

a) Was besagt der Dimensionssatz für f?

b) Zeigen Sie, dass n gerade ist, falls $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$.

c) Sei U ein Untervektorraum von V mit $V = U + \mathrm{Kern}(f)$ und $U \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$. Weiter sei $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von U und es gelte $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$. Beweisen Sie, dass $\{w_1, \ldots, w_m, f(w_1), \ldots, f(w_m)\}$ eine Basis von V ist.

d) Geben Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Bild}(g) = \mathrm{Kern}(g)$ an.

Viel Erfolg !