Klausur zur Linearen Algebra II — Bergische Universität Wuppertal
Wintersemester 2016/2017 — Dr. Thorsten Weist
16.02.2017, 14:30 - 16:30 Uhr — M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte tragen Sie die folgenden Daten leserlich und in Blockschrift ein:

Name	Vorname	Matrikelnummer
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Max. Punktzahl	2	4	2	5	3	4	4	24	
erreichte Punktzahl									

Es gelten die Notationen aus der Vorlesung. Alle Beweis- und Rechenschritte müssen erläutert werden.

Aufgabe 1

Betrachten Sie den Untervektorraum $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + 2x_1y_3 + x_2y_2 + 2x_3y_1 + x_3y_3$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ bezüglich der $M_\mathcal{B}(b)$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{0, 1, -1\}$ ist.

c) Untersuchen Sie b auf Definitheit.

Aufgabe 3

Welche der folgenden komplexen Matrizen sind diagonalisierbar?

a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1+i \\ 0 & -2 & 0 \\ -1-i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenräume und die Haupträume von A.

c) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass $T^{-1}AT$ in Jordanscher Normalform ist.

d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 5

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass $(f^2 - 2f + \mathrm{id}_V) \circ (f^2 + 2f + \mathrm{id}_V) = 0$.

a) Welche Eigenwerte kann f haben? Welche Möglichkeiten gibt es für die Größen der Jordanblöcke zu diesen Eigenwerten?

b) Seien $\dim V = 5$, $\mathrm{Rang}(f - \mathrm{id}_V) = 3$ und $\mathrm{Rang}(f + \mathrm{id}_V) = 4$. Welche Möglichkeiten gibt es für die Jordansche Normalform von f?

Aufgabe 6

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Ist λ ein Eigenwert von f, dann ist λ^2 ein Eigenwert von f^2.

b) Wenn f diagonalisierbar mit Eigenwerten 1 und -1 ist, dann ist $f^2 = \mathrm{id}_V$.

c) Ist f^2 diagonalisierbar, so ist auch f diagonalisierbar.

d) Durch $(x, y) := \sum_{j=1}^{n} j \cdot x_j y_j$ wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Aufgabe 7

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass durch $b : V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle f(x), f(y)\rangle$, eine Bilinearform definiert wird.

b) Sei $W := V/\mathrm{Kern}(f)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$s : W \times W \to \mathbb{R},\ (x + \mathrm{Kern}(f), y + \mathrm{Kern}(f)) \mapsto \langle f(x), f(y)\rangle$$

wohldefiniert ist und ein Skalarprodukt auf W definiert.