Klausur zur Linearen Algebra I
Sommersemester 2016
2. August 2016, 14:30 - 16:30 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte tragen Sie die folgenden Daten leserlich und in Blockschrift ein:

Name	Vorname	Matrikelnummer
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Max. Punktzahl	4	4	4	4	4	4	24	
erreichte Punktzahl								

Es gelten die Notationen aus der Vorlesung.

Aufgabe 1

Seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 37 \\ 2 & 1 & 2 & 22 \\ 2 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

c) Gibt es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$, so dass $L_{A,c} = \emptyset$?

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Untervektorräume $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 = x_2, 2x_3 = x_4\}$ und $U_2 = \langle (2, 4, -1, -2), (1, 1, -1, -1), (0, 2, 1, 0) \rangle$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$.

a) Berechnen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

b) Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ an mit $\mathrm{Kern}(f) = U_1$.

c) Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ an mit $\mathrm{Bild}(f) = U_2$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = ((1,-1,1),(2,1,0),(0,0,1))$ und $\mathcal{D} = ((1,1,0),(0,1,0),(0,1,-1))$ Basen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ sind.

b) Sei $\mathcal{E} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$.

c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $x \mapsto A \cdot x$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Ferner sei

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix der Abbildung f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

b) Bestimmen Sie für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist. Geben Sie in diesen Fällen auch die Inverse der Matrix A_λ an.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ und $U \subseteq V$ ein zweidimensionaler Untervektorraum. Dann gibt es Vektoren v_i, v_j mit $1 \leq i \neq j \leq 3$, so dass (v_i, v_j) eine Basis von U ist.

b) Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ und $g : V \to V$ zwei lineare Abbildungen. Ist $f \circ g = 0$, so ist auch $g \circ f = 0$.

c) Sei $A \in K^{2\times 2}$ fest gewählt. Die Abbildung $\varphi : K^{2\times 2} \to K^{2\times 2}$ mit $X \mapsto AX - XA$ ist linear.

d) Seien $A, B, C \in K^{3\times 3}$ mit $\operatorname{rg}(A) = 1, \operatorname{rg}(B) = 2$ und $\operatorname{rg}(C) = 3$. Dann sind A, B, C im K-Vektorraum $K^{3\times 3}$ linear unabhängig.

Aufgabe 6

Betrachten sie für $n \in \mathbb{N}$ die Matrix $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einträgen

$$(A_n)_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j+1 \\ 2, & \text{falls } i = j-1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det(A_n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.