Charlotte Bachmair
Matrikelnummer: 1152750
Projektseminar zur Stochastik
Frau Prof. Dr. Barbara Rüdiger

Kapitel 4: Irreduzible und aperiodische Markov Ketten[1]

Für einige besonders interessante Ergebnisse der Markov Theorie, werden zunächst bestimmte Annnahme über Markov Ketten betrachtet. Es ist eine wichtige Aufgabe in der Markov Theorie Bedingungen zu finden, die einerseits stark genug sind, damit man hilfreiche Behauptungen erstellen kann, aber anderseits auch schwach genug für viele gute Beispiele sind. In diesem Kapitel geht es um zwei solcher Annahmen: **Irreduzibilität** und **Aperiodizität.** Diese beiden Bedingungen sind von zentraler Bedeutung in der Markov Theorie und insbesondere spielen sie in der Forschung über stationäre Verteilung eine wichtige Rolle.

Wir beginnen mit Irreduziblität, was, einfach gesprochen, die Eigenschaft ist, dass alle Stadien der Markov Kette von allen anderen Stadien erreicht werden können. Um dies genauer zu beschreiben, betrachten wir eine Markov Kette $(X_0, X_1, ...)$ mit Zustandsraum $S = \{s_1, ... , s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Wir sagen, dass der Zustand s_i mit einem anderen Zustand s_j **kommuniziert (**geschrieben: $s_i \rightarrow s_j$), wenn die Wahrscheinlichkeit, dass, beginnend bei s_i, die Kette s_j erreicht, positiv ist. In anderen Worten: s_i und s_j kommunizieren, wenn es ein n gibt, so dass $\mathbf{P}(X_{m+n}=s_j \mid X_m = s_i) > 0$ bzw. $(P_{ij})^{(n)} > 0$.

Wenn $s_i \rightarrow s_j$ und $s_j \leftarrow s_i$, dann sagt man die Zustände s_i und s_j sind **verbunden,** und schreibt: $s_i \leftrightarrow s_j$. Dies bringt uns gleich zu der Definition von Irreduzibilität:

Definition 4.1 Eine Markov Kette $(X_0, X_1, ...)$ mit Zustandsraum $S=\{s_1, ... ,s_k\}$ und Übergangsmatrix P heißt ***irreduzibel***, falls für alle $s_j, s_i \in S$ gilt: $s_i \leftrightarrow s_j$. Sonst heißt die Markov Kette ***reduzibel.***

Oder anders gesagt: Die Kette ist irreduzibel, falls es für alle $s_j, s_i \in S$ ein n gibt, so dass $(P^n)_{i,j} > 0$.

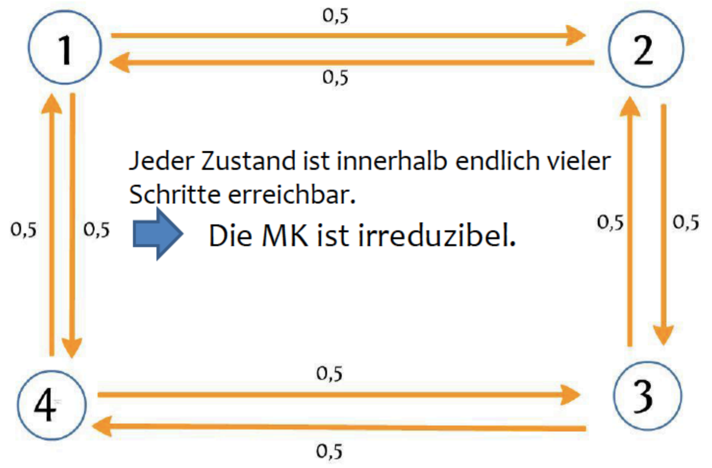
Um zu zeigen, dass eine Markov Kette irreduzibel ist, betrachtet man das Übergangsdiagramm und überprüft, ob man von jedem Zustand innerhalb endlich vieler Schritte zu jedem anderen Zustand gelangen kann.

[1] Olle Häggström, "Finite Markov Chains and Algorithmic Applications", Cambridge 2002, S. 22-27.

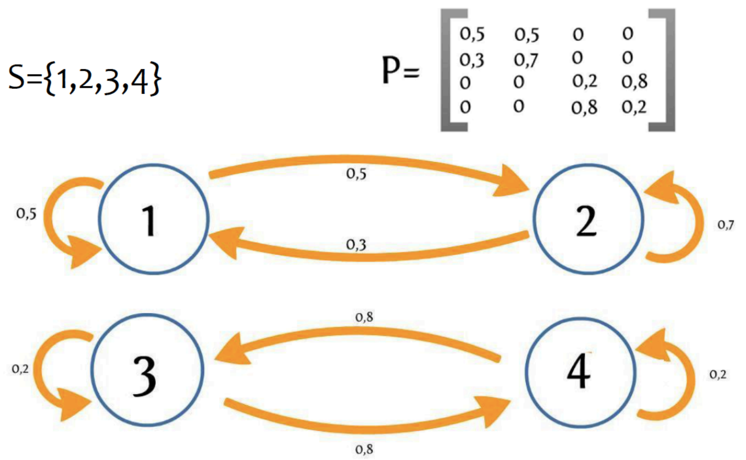
Charlotte Bachmair
Matrikelnummer: 1152750
Projektseminar zur Stochastik
Frau Prof. Dr. Barbara Rüdiger

Beispiele:

1. The random walker



2. Die Markov Kette (X_0, X_1, ...) mit Zustandsraum S = {1, 2, 3, 4} und Übergangsmatrix $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$ ist zum Beispiel reduzibel, denn beginnt die Kette mit Zustand 1 oder 2 ist sie eingeschränkt auf Zustand 1 und 2. Dasselbe gilt für Zustand 3 und 4, einmal dort kann sie nicht zu Zustand 1 oder 2 wechseln.



(Betrachtet man die Kette nur in Zustand 1 oder 2, dann verhält sie sich wie eine Markov Kette mit Zustandsraum {1,2} und Übergangsmatrix $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$. Dies zeigt eine charakteristische Eigenschaft für reduzible Markov Ketten, welches den Begriff „reduzibel" noch einmal erklärt: Wenn eine Markov Kette reduzibel ist, dann kann das Langzeitverhalten auf die Analyse von den Langzeitverhalten mehrerer Markov Ketten mit kleineren Zustandsräumen reduziert werden.)

Das Konzept der Aperiodizität

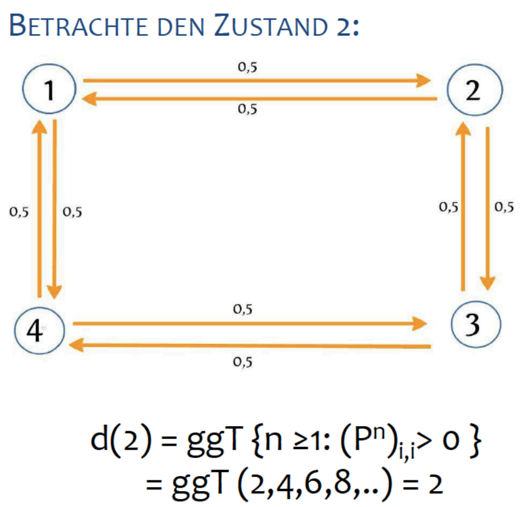
Für eine endliche oder unendliche Menge positiver ganzer Zahlen $\{a_1, a_2, \ldots\}$, schreiben wir ggT $\{a_1, a_2, \ldots\}$ für den größten gemeinsamen Teiler von $a_1, a_2, \ldots$. Die **Periode** d (s_i) eines Zustandes $s_i \in S$ ist definiert als **d (s_i) = ggT $\{n \geq 1: (P^n)_{i,i} > 0\}$**.

In Worten: Die Periode von s_i ist der größte gemeinsame Teiler von der Menge der möglichen Rückkehrzeiten zum Startpunkt $X_0 = s_i$. Wenn d $(s_i) = 1$, sagt man, der Zustand s_i ist **aperiodisch**.

Definition 4.2 Eine Markov Kette heißt **aperiodisch**, falls alle Zustände aperiodisch sind. Ansonsten heißt die Kette **periodisch.**

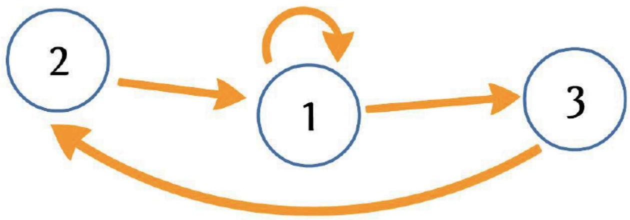
Anschaulich ist eine Markov Kette periodisch, wenn man trotz der Zufälligkeit des Gesamtsystems exakte Voraussagen darüber treffen kann, in welcher Teilmenge der Zustandsmenge sich das System an einem bestimmten Zeitpunkt befinden wird.

Beispiel periodisch Random walker:



Der Random Walker steht zum Zeitpunkt 0 in der Ecke v_1. Er muss also eine gerade Anzahl an Schritten nehmen um zurück zu v_1 zu kommen. Das heißt $(P^n)_{i,j} > 0$ nur für n = 2, 4, 6,... daraus folgt: ggT $\{n \leq 1: (P^n)_{i,j} > 0\}$ = ggT $\{2, 4, 6, \ldots\} = 2$ und die Kette ist also periodisch.

Beispiel aperiodisch:



$$d(1) = \text{ggT}\,\{n \geq 1: (P^n)_{i,i} > 0\}$$
$$= \text{ggT}\,(1,3) = 1$$

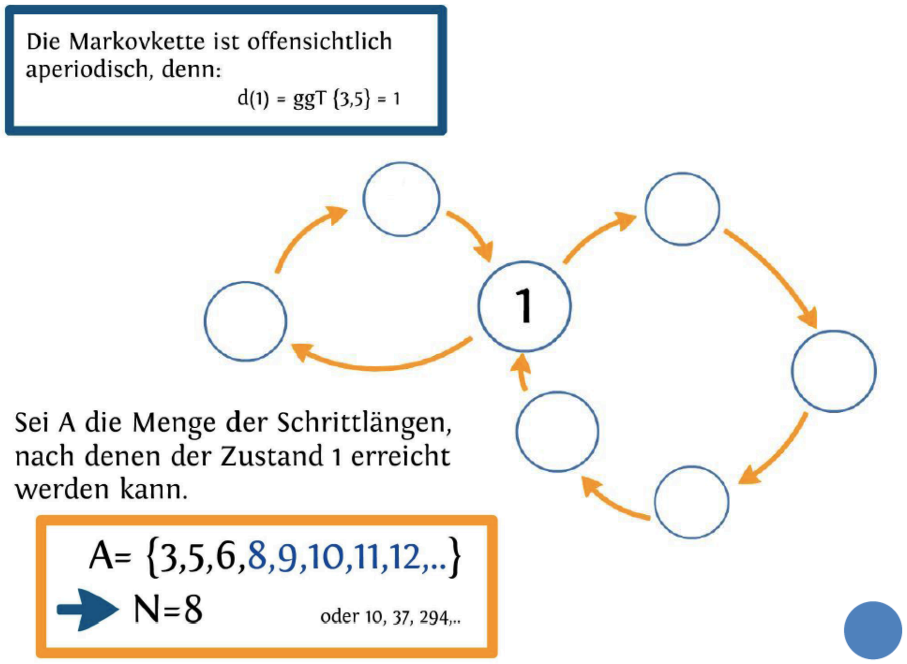
Beispiel Gothenburger Wetter: Man nimmt an, dass es nur zwei verschiedene Zustände des Wetters gibt: Regen und Sonnenschein. In Gothenburg liegt die Wahrscheinlichkeit, dass das Wetter morgen genauso ist wie heute, bei 75%. Dann ist das Wetter eine Markov Kette mit Zustandsraum $S = \{s_1, s_2\}$ (mit s_1 = „Regen“ und s_2 = „Sonnenschein“) und der Übergangsmatrix $P = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$.

Es ist einfach zu erkennen, dass, ohne Einschränkungen ob es regnet oder die Sonne scheint, die Wahrscheinlichkeit, dass wir das gleiche Wetter n Tage später haben, für alle n echt positiv ist. Also: $(P^n)_{i,i} > 0$ für alle n und alle Zustände s_i. Dies beinhaltet offensichtlich, dass die Markov Kette irreduzibel ($s_i \leftrightarrow s_j$) und aperiodisch (ggT = 1) ist.

Theorem 4.1: Sei $(X_0, X_1, \ldots)$ eine aperiodische Markov Kette mit dem Zustandsraum $S = \{s_1,\ldots,s_k\}$ und Übergangsmatrix P.

Dann existiert ein $N < \infty$, so dass $(P^n)_{i,i} > 0$ für alle $s_i \in S$ und alle $n \geq N$.

In Worten: Für eine aperiodische Markov Kette existiert eine Schrittzahl N, so dass für alle darauffolgenden Schritte $n \geq N$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand s_i in den Ausgangszustand s_i zurückkehrt für alle $s_i \in S$ positiv ist.



Um das Theorem zu beweisen, benötigt man folgendes Lemma aus der Zahlentheorie:

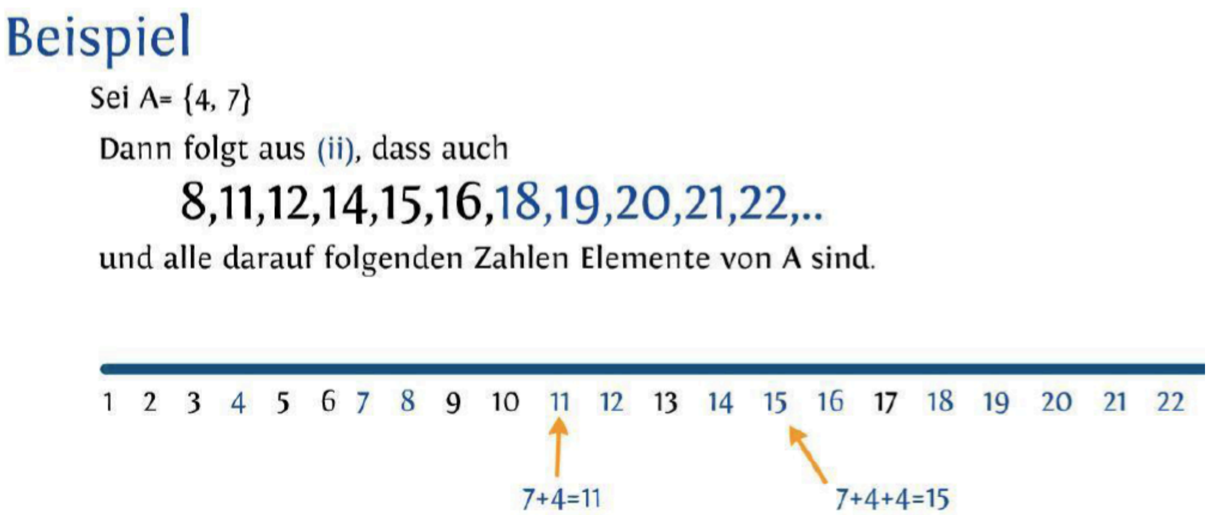
<u>Lemma 4.1:</u> Sei A = $\{a_1, a_2, \dots\}$ eine Menge positiver ganzer Zahlen für die gilt:

(i) A ist teilerfremd, also ggT $\{a_1, a_2, \dots\} = 1$

(ii) A ist abgeschlossen bezüglich der Addition.

Dann existiert ein positives ganzzahliges $N < \infty$, mit $n \in A$ für alle $n \geq N$.

(Beweis siehe Brémaud)



Beweis von Theorem 4.1: Für $s_i \in S$ sei $A_i = \{n \geq 1: (P^n)_{i,i} > 0\}$, also ist A_i die Menge der möglichen Rückkehrzeitpunkte zu s_i, wenn die Markov Kette bei s_i startet. Wir haben angenommen, dass die Markov Kette aperiodisch ist, dann ist auch der Zustand s_i aperiodisch und A_i ist teilerfremd (erste Bedingung von Lemma 4.1 erfüllt √). Des Weiteren ist A_i abgeschlossen bezüglich der Addition, denn:

Betrachte a, a' $\in A_i$ (also 2 Schrittmöglichkeiten vom Zustand s_i zum Zustand s_i zurückzukehren), dann gilt $\mathbf{P}(X_a = s_i \mid X_0 = s_i) > 0$ und $\mathbf{P}(X_{a+a'} = s_i \mid X_a = s_i) >0$.

Wir wollen zeigen, dass $\mathbf{P}(X_{a+a'} = s_i \mid X_0 = s_i) > 0$.

Es gilt, dass:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{a+a'} = s_i \mid X_0 = s_i) &\geq \mathbf{P}(X_a = s_i, X_{a+a'} = s_i \mid X_0 = s_i) \\ &= \mathbf{P}(X_a = s_i \mid X_0 = s_i)\, \mathbf{P}(X_{a+a'} = s_i \mid X_a = s_i) \\ &> 0\end{aligned}$$

Die Summe aller a, a' $\in A_i$ ist also auch Element der Menge A_i, also $a+a' \in A_i$ und somit ist A_i abgeschlossen bezüglich der Addition (zweite Bedingung von Lemma 4.1 erfüllt √).

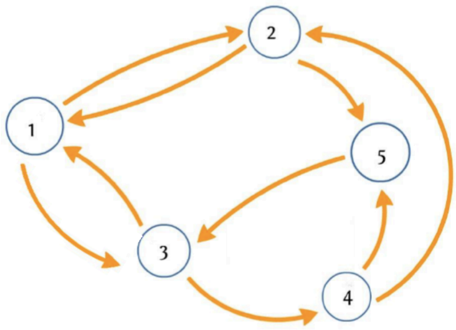
A_i erfüllt also die beiden Eigenschaften des Lemma 4.1, dass heißt es existiert eine ganze Zahl $N_i < \infty$, so dass $(P^n)_{i,i} > 0$ mit $n \in A$ für alle $n \geq N_i$.

Theroem 4.1 folgt, indem man $N = \max\{N_1, \ldots, N_k\}$ wählt. *q. e. d.*

Wenn man Aperiodizität und Irreduzibilität miteinander kombiniert, erhält man folgendes wichtiges Korollar:

Korollar 4.1: Sei $(X_0, X_1, \ldots)$ eine irreduzible und aperiodische Markov Kette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Dann existiert ein $M < \infty$, so dass gilt $(P^n)_{i,j} > 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $n \geq M$.

Sei $(X_0, X_1, ..)$ eine irreduzible, aperiodische MK mit Zustandsraum S={1,2,3,4,5} und der Übergangsmatrix P.



In Worten: Es existiert eine Schrittzahl M, so dass für alle darauffolgenden Schritte $n \geq M$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand s_i zum Zustand s_j geht, positiv ist.

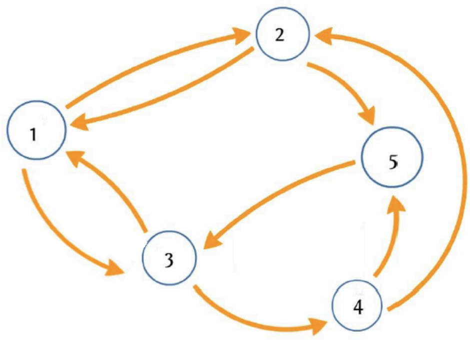
Charlotte Bachmair
Matrikelnummer: 1152750
Projektseminar zur Stochastik
Frau Prof. Dr. Barbara Rüdiger

Beweis Korollar 4.1: Wir wissen aus Theorem 4.1: Es existiert ein $N < \infty$, so dass $(P^n)_{i,i} > 0$ für alle $s_i \in S$ und alle $n \geq N$. Und aus der Irreduzibilität folgt: Es existiert ein $n_{i,j}$, so dass $(P^{n_{i,j}})_{i,j} > 0$.

Wir suchen: $M_{i,j}$, so dass für alle $m \geq M_{i,j}$ gilt: $\mathbf{P}(X_m = s_j \mid X_0 = s_i) > 0$

Dafür definieren wir $M_{i,j} = N + n_{i,j}$

$M_{ij} = N + n_{ij}$



Für alle $m \geq M_{i,j}$ haben wir:

$$\mathbf{P}(X_m = s_j \mid X_0 = s_i) \geq \mathbf{P}(X_{m-n_{i,j}} = s_i , X_m = s_j \mid X_0 = s_i)$$
$$= \mathbf{P}(X_{m-n_{i,j}} = s_i \mid X_0 = s_i)\, \mathbf{P}(X_m = s_j \mid X_{m-n_{i,j}} = s_i)$$

*folgt durch Bedingung der Markov-Kette

$\mathbf{P}(X_{m-n_{i,j}} = s_i \mid X_0 = s_i) > 0$, da $m-n_{i,j} \geq N$ (Theorem 4.1) und

$\mathbf{P}(X_m = s_j \mid X_{m-n_{i,j}} = s_i) > 0$, nach Definition von $n_{i,j}$.

$\Rightarrow \mathbf{P}(X_m = s_j \mid X_0 = s_i) > 0$ für alle $m \geq M_{i,j}$.

Das Korollar folgt, indem man $M = \max \{M_{1,1}, M_{1,2}, \ldots, M_{1,k}, M_{2,1}, \ldots, M_{k,k}\}$ wählt.

q. e. d.

Charlotte Bachmair
Matrikelnummer: 1152750
Projektseminar zur Stochastik
Frau Prof. Dr. Barbara Rüdiger

Kapitel 5: Stationäre Verteilung[2]

In diesem Kapitel geht es um das Langzeitverhalten von Markov Ketten. Was kann man über eine Markov Kette sagen, die sehr lange läuft? Gibt es interessante Limes Theoreme?

Wenn man irgendeine nicht triviale Markov Kette (X_0, X_1, ...) betrachtet, wird der Wert von X_n, selbst mit $n \to \infty$, im Allgemeinen nicht gegen einen bestimmten Wert konvergieren. Wir hoffen jedoch, dass die Verteilung von X_n sich bezüglich eines Grenzwertes annähert. Dies ist in der Tat der Fall, falls die Markov Kette irreduzibel und aperiodisch ist.

Für die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten von X_n lassen sich hingegen Aussagen über den Grenzwerte machen:

$\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_k)$ heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung**

$$\Leftrightarrow \qquad \mu_i \geq 0 \text{ für i } = 1, \ldots, \text{k und } \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt an, wie sich die Wahrscheinlichkeiten auf die möglichen Zufallsergebnisse (Werte der Zufallsvariablen) verteilen.

Definition 5.1: Sei (X_0, X_1, ...) eine Markov Kette mit dem Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Ein Vektor $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ heißt **stationäre Verteilung** der Markov Kette, wenn gilt:

(i) $\pi_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$

(ii) $\pi P = \pi$, also $\sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{i,j} = \pi_j$ für $j = 1, \ldots, k$

Eigenschaft (i) bedeutet, dass π die mögliche Verteilung über $\{s_1, \ldots, s_k\}$ beschreibt. (ii) besagt, dass wenn die Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ gleich π ist, dann entspricht die Verteilung $\mu^{(1)}$ zum Zeitpunkt 1 der Kette: $\mu^{(1)} = \mu^{(0)}P = \pi P = \pi$, und bei Wiederholung sehen wir, dass $\mu^{(n)} = \pi$ für jedes n.

[2] Olle Häggström, "Finite Markov Chains and Algorithmic Applications", Cambridge 2002, S. 28-33.

Beispiel Wetter in Los Angeles: Man nimmt an, dass es nur zwei verschiedene Zustände des Wetters gibt: Regen und Sonnenschein. Dann ist das Wetter eine Markov Kette mit Zustandsraum S = {s_1, s_2} (mit s_1 = „Regen" und s_2 = „Sonnenschein") und der Übergangsmatrix P= $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$.

Wenn wir $\mu^{(0)} = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$ als Startposition wählen folgt $\mu^{(0)} = \mu^n$ für alle n und $\mu^{(0)}$ heißt stationare Verteilung der Markov Kette:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{9}{12} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Theorem 5.1 (Existenz von stationären Verteilungen):
Für jede irreduzible, aperiodische Markov Kette existiert mindestens eine stationäre Verteilung.

Um dieses Theorem zu beweisen müssen wir zunächst ein Lemma beweisen, dass sich mit der Treffzeit von Markov Ketten beschäftigt. Hierfür definieren wir zunächst einmal Treffzeit:

$T_{i,j}$ = min {n ≥ 1 | X_n = s_j} heißt **Treffzeit.**

Die Treffzeit, ist also die Zeit, die nach dem Start in s_i vergeht bis das erste Mal s_j besucht wird, wobei $T_{i,j} = \infty$ falls s_j niemals besucht wird.

Des Weiteren definieren wir den Erwartungswert:

$\tau_{i,j}$ = **E**($T_{i,j}$) ist der **Erwartungswert** von $T_{i,j}$.

Er gibt die erwartete Zeit an, die es braucht mit Startwert s_i zu Zustand s_j zu kommen. Für den Fall, dass i = j, wird $\tau_{i,j}$ die **mean return time** für Zustand s_i genannt.

Lemma 5.1: Sei (X_0, X_1, ...) eine irreduzible aperiodische Markov Kette mit dem Zustandsraum S = {s_1, ... ,s_k} und Übergangsmatrix P. Dann gilt für alle s_i, $s_j \in$ S, dass, wenn die Markov Kette in s_i startet:

(i) $\mathbf{P}(T_{i,j} < \infty) = 1$, d.h. $T_{i,j}$ ist endlich

(ii) $\mathbf{E}(T_{i,j}) < \infty$, d.h. der Erwartungswert von $T_{i,j}$ ist ebenfalls endlich

<u>Beweis Lemma 5.1:</u> Laut Korollar 4.1 existiert für jede aperiodische irreduzible Markov Kette ein M > 0, sodass $(P^M)_{i,j} > 0$ für alle $i,j \in \{1, \ldots, k\}$. Wir setzen $\alpha = \min\left\{(P^M)_{i,j} \mid i,j \in \{1,\ldots,k\}\right\}$, wobei $\alpha > 0$ die minmalen Einträge der Matrix P^M angibt.

Setze zwei Zustände s_i und s_j fest und starte die Markov Kette in s_i.

Es folgt:

$$P(T_{i,j} > M) \le P(X_M \ne s_j) = 1 - \underbrace{P(X_M = s_j)}_{= (P^M)_{i,j} \ge \alpha} = 1 - (P^M)_{i,j} \le 1 - \alpha$$

da $\{T_{i,j} > M\} \subset \{X_M \ne s_i\}$

Weiter muss betrachtet werden, was zum Zeitpunkt 2M passiert:

$$\begin{aligned} P(T_{i,j} > 2M) &= P(T_{i,j} > M) P(T_{i,j} > 2M \mid T_{i,j} > M) \\ &\le P(T_{i,j} > M) P(X_{2M} \ne s_j \mid T_{i,j} > M) \\ &\le (1-\alpha) \quad (1-\alpha) \\ &\le (1-\alpha)^2 \end{aligned}$$

Wir wiederholen dieses Problem für beliebiges l:

$$\begin{aligned} P(T_{i,j} > lM) &= P(T_{i,j} > M)\ P(T_{i,j} > 2M \mid T_{i,j} > M) \times \ldots \times \mathrm{P}(T_{i,j} > lM \mid T_{i,j} > (l-1)M) \\ &\le (1-\alpha)^l \end{aligned}$$

Mit $l \to \infty$ läuft $(1-\alpha)^l$ gegen 0.

Dies bedeutet $\mathbf{P}(T_{i,j} = \infty) = 0$ und deshalb ist auch $\mathbf{P}(T_{i,j} < \infty) = 1 - \mathbf{P}(T_{i,j} = \infty) = 1 - 0 = 1$, womit (i) bewiesen wäre.

Um (ii) zu beweisen, wird die Definition des Erwartungswertes verwendet:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \ge k)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[T_{i,j}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_{i,j} \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_{i,j} > n) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=lM}^{(l+1)M-1} \mathbf{P}(T_{i,j} > n) \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=lM}^{(l+1)M-1} \mathbf{P}(T_{i,j} > lM) = M \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_{i,j} > lM) \\
&\leq M \sum_{l=0}^{\infty} (1-\alpha)^{l} \\
&= M \frac{1}{1-(1-\alpha)} \\
&= \frac{M}{\alpha} < \infty
\end{aligned}$$

Geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ und s eine geometrische Reihe $s_n = \sum_{k}^{n} q^k$.

Dann folgt für den Wert von s

$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$

q. e. d.

<u>Beweis Theorem 5.1:</u> Gegeben sei eine Markov Kette (X_0, X_1, ...) mit dem Zustandsraum S = {s_1, ... ,s_k} und Übergangsmatrix P. Wir starten die Kette in s_1 und definieren: $\rho_i = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = s_i, T_{1,1} > n)$ für i = 1, ..., k

ρ_i ist dann also die erwartete Anzahl an Besuchen des Zustandes *i* bis zum Zeitpunkt $T_{1,1}$ - 1. Da der Erwartungswert von ***E*** [$T_{1,\,1}$] = $\tau_{1,1}$ endlich ist, ist $\rho_i < \tau_{1,1}$ ebenfalls endlich. Unser Kandidat für unsere stationäre Verteilung ist: $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k) = \left(\frac{\rho_1}{\tau_{1,1}}, \frac{\rho_2}{\tau_{1,1}}, \ldots, \frac{\rho_k}{\tau_{1,1}}\right)$.

Zunächst müssen wir zeigen, dass die Wahl von π die Bedingungen (i) und (ii) von Definition 5.1 erfüllen:

Zuerst müssen wir beweisen, dass die Relation $\sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{i,j} = \pi_j$ in Bedingung (ii) für j ≠1 gilt (der Fall j = 1 wird separat behandelt):

Zur Erinnerung noch mal die zu erfüllenden Bedingungen:

(i) $\pi_i \geq 0$ für alle i = 1, .. ,k und $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$

(ii) $\pi P = \pi$, also $\sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{i,j} = \pi_j$ für $j = 1$, ..., k

Da wir im Zustand s_1 starten und $j \neq 1$ ist, ist $P(X_0 = s_j) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\pi_j = \frac{\rho_j}{\tau_{1,1}} &= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = s_j, T_{1,1} > n) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = s_j, T_{1,1} > n-1) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, X_n = s_j, T_{1,1} > n-1) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_n = s_j \mid X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1)\, \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\mathbf{P}(X_n = s_j \mid X_{n-1} = s_i)}_{= \mathrm{P}_{i,j}} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{i,j} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{i,j} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{i,j} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_m = s_i, T_{1,1} > m) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{i,j} \rho_i = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{i,j} \rho_i}{\tau_{1,1}} = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \mathrm{P}_{i,j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(X_n = s_j, T_{1,1} > n-1) \\
&= \mathrm{P}(X_n = s_j, T_{1,1} > n) + \underbrace{P(X_n = s_j, T_{1,1} = n)}_{= \emptyset,\ \text{da } j \neq 1}
\end{aligned}
$$

Als nächstes zeigen wir Bedingung (ii) für den Fall, dass j = 1 ist. Es gilt $\rho_1 = 1$, da

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{für } n = 0: \ \mathrm{P}(X_0 = s_1, T_{1,1} > 0) = 1 \\
&\text{für } n > 0: \ \mathrm{P}(X_n = s_1, T_{1,1} > n) = P(\emptyset) = 0
\end{aligned}
\right\} \rho_1 = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = s_1, T_{1,1} > n) = 1
$$

$$\begin{aligned}
\rho_1 = 1 = \mathbf{P}(T_{1,1} < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_{1,1} = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, X_n = s_1, T_{1,1} > n-1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_n = s_1 \mid X_{n-1} = s_i)\mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} P_{i,1}\, \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P_{i,1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P_{i,1} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_m = s_i, T_{1,1} > m)}_{= \rho_i} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_i P_{i,1}
\end{aligned}$$

Daraus folgt :

$$\pi_1 = \frac{\rho_1}{\tau_{1,1}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{P}_{i,1}\rho_i}{\tau_{1,1}} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}_{i,1}\pi_i$$

Also ist auch Bedingung (ii) für j = 1 erfüllt. Es bleibt also noch zu zeigen, dass auch Bedingung (i) gilt. Das $\pi_i \geq 0$ für i = 1, ... , k ist offensichtlich.

Um zu sehen, dass auch $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$ betrachte folgendes:

$$\begin{aligned}
\tau_{1,1} = \mathbf{E}\left[T_{1,1}\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_{1,1} > n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_n = s_{i,} T_{1,1} > n) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = s_{i,} T_{1,1} > n) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \rho_i \qquad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \pi_i = \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1
\end{aligned}$$

Damit ist auch Bedingung (i) gezeigt. *q. e. d*