Markov-Ketten[1]

Definition 2.1

Sei P eine $k \times k$-Matrix mit Elementen $\{P_{i,j} : i, j=1,...,k\}$.
Ein Zufallsprozess $(X_0, X_1,...)$ mit endlichem Zustandsraum $S=\{s_1,...,s_k\}$ heißt homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, falls für alle n, alle i, j $\in \{1,...,k\}$ und alle $i_0,...,i_{n-1} \in \{1,...,k\}$ gilt:

$$P(X_{n+1}=s_j \mid X_0=s_{i0}, X_1=s_{i1},...,X_{n-1}=s_{i\,n-1}, X_n=s_i)$$

$$=P(X_{n+1}=s_j \mid X_n=s_i)$$

$$=P_{i,j}$$

Die Elemente der Übergangsmatrix P heißen Übergangswahrscheinlichkeiten.
Die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{i,j}$ drückt die bedingte Wahrscheinlichkeit aus, „morgen" im Zustand s_j zu sein, gegeben, dass wir „heute" im Zustand s_i sind.

Jede Übergangsmatrix erfüllt:

$P_{i,j} \geq 0$, für alle i, j $\in \{1, ... , k\}$ und

$\sum_{j=1}^{k} P_{i,j}=1$, für alle i $\in \{1, ... , k\}$.

Das bedeutet

$$P(X_{n+1}=s_1 \mid X_n=s_i) + P(X_{n+1}=s_2 \mid X_n=s_i) + ... + P(X_{n+1}=s_k \mid X_n=s_i)=1.$$

Anfangsverteilung:

Sei $(X_0, X_1,...)$ eine Markov-Kette. Die Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ ist gegeben durch den Zeilenvektor:

$$\mu^{(0)} = (\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, ... , \mu_k^{(0)}) = (P(X_0=s_1), P(X_0=s_2), ... , P(X_0=s_k)).$$

Da $\mu^{(0)}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt, gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(0)} = 1.$$

Die Zeilenvektoren $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, ...$ bezeichnen die Verteilung der Markov-Kette zu den Zeitpunkten 1, 2, ..., so dass

$$\mu^{(n)} = (\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, ... ,\mu_k^{(n)}) = (P(X_n=s_1), P(X_n=s_2), ... , P(X_n=s_k)).$$

[1] Die Inhalte diesen Skriptes sind entnommen aus: Häggström, Olle (2002). *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. Cambridge University Press.

Wenn die Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ und die Übergangsmatrix P bekannt sind, dann können alle Verteilungen $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, ... der Markov-Kette berechnet werden.
Dies geschieht mithilfe von Matrix-Multiplikationen.
Wir schreiben P^n um die n-te Potenz der Matrix P auszudrücken.

<u>Theorem 2.1</u>

Sei $(X_0, X_1,...)$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S=\{s_1,...,s_k\}$, Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ und Übergangsmatrix P. Dann gilt für jedes n: Die Verteilung $\mu^{(n)}$ erfüllt zum Zeitpunkt n:

$$\mu^{(n)} = \mu^{(0)}P^n.$$

Beweis per Induktion über n:

Induktionsanfang: Sei n=1. Dann gilt für j=1, ... , k:

$$\begin{aligned}
\mu_j^{(1)} = P(X_1 = s_j) &= \sum_{i=1}^{k} P(X_0 = s_i, X_1 = s_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(X_0 = s_i)\, P(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(0)} P_{i,j} \\
&= (\mu^{(0)}P)_j
\end{aligned}$$

wobei $(\mu^{(0)}P)_j$ das j-te Element des Zeilenvektors $\mu^{(0)}P$ bezeichnet.

$\Rightarrow \mu^{(1)} = \mu^{(0)}P.$

Induktionsannahme: $\mu^{(m)} = \mu^{(0)}P^m$ gilt für alle m.

Induktionsschritt: Sei n = m
$m \rightarrow m+1$

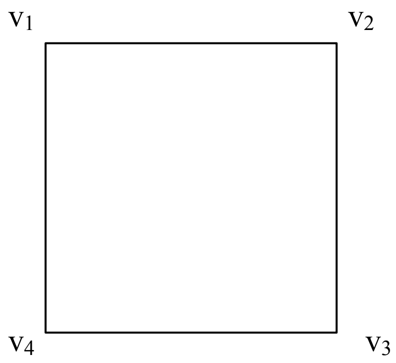
$$\begin{aligned}
\mu_j^{(m+1)} = P(X_{m+1} = s_j) &= \sum_{i=1}^{k} P(X_m = s_i, X_{m+1} = s_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(X_m = s_i)\, P(X_{m+1} = s_j \mid X_m = s_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(m)} P_{i,j} \\
&= (\mu^{(m)}P)_j
\end{aligned}$$

sodass $\mu^{(m+1)} = \mu^{(m)}P$.

Laut Induktionsannahme gilt: $\mu^{(m)} = \mu^{(0)} P^m$

$\Rightarrow \mu^{(m+1)} = \mu^{(m)}P = \mu^{(0)} P^m P = \mu^{(0)} P^{m+1}$

Beispiel 2.1: random walk



Wir befinden uns zur Zeit 0 am Eckpunkt v_1 des Quadrates ($P(X_0 = v_1) = 1$). Wir werfen eine Münze, um zu entscheiden, zu welchem Eckpunkt (v_4 oder v_2) wir uns als nächstes bewegen. Wenn die Kopfseite der Münze oben liegt, bewegen wir uns im Uhrzeigersinn, ansonsten in die andere Richtung, also gegen den Uhrzeigersinn. Sobald der nächste Eckpunkt erreicht ist, werfen wir die Münze erneut und wiederholen den Vorgang...

Sei $(X_0, X_1, \dots)$ ein Wahrscheinlichkeitsprozess.
Der Zustandsraum ist $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Auf Grund des Münzwurfs ergeben sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X_{n+1} = v_2 \,|\, X_n = v_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X_{n+1} = v_3 \,|\, X_n = v_2) = \frac{1}{2} \; ....$$

Es handelt sich um eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

und Anfangsverteilung: $\mu^{(0)} = (1, 0, 0, 0)$

Es gilt $P_{i,i} = 0$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, da wir niemals stehen bleiben und uns bei jedem Schritt der Markov-Kette weiterbewegen.

Außerdem gilt: $P_{3,1} = P_{1,3} = P_{4,2} = P_{2,4} = 0$, da wir uns nur entlang er Linien und nicht diagonal bewegen können.

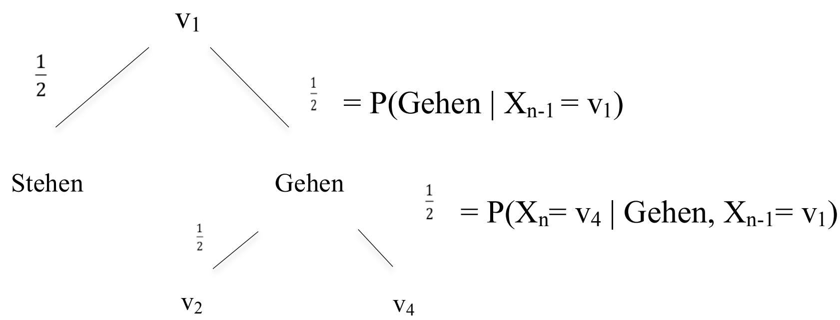
Modifizierung (Problem 2.2):

Angenommen wir werfen an jedem Eckpunkt nicht nur eine, sondern zwei Münzen, wobei die erste Münze darüber entscheidet, ob wir stehen bleiben oder uns weiter bewegen.
Die zweite Münze entscheidet wie oben, ob wir uns im oder gegen der Uhrzeigersinn bewegen.
Auf Grund der Modifizierung muss nun auch die Übergangsmatrix verändert werden, da nun die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = v_k | X_n = v_k) = \frac{1}{2} \text{ mit } k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

mit berücksichtigt werden müssen.

Außerdem verringern sich nun die bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten beim Wechsel des Eckpunktes.
Betrachte folgenden Wahrscheinlichkeitsbaum für den ersten Schritt der Markov-Kette:



Der Wahrscheinlichkeitsbaum gilt auch für alle weiteren Schritte der Markov-Kette mit vertauschten Zuständen $v_1, \ldots, v_4$.
Die Münzwürfe sind nicht voneinander abhängig.
Es ergibt sich nun der Wert $\frac{1}{4}$ für die Übergangswahrscheinlichkeiten in der Übergangsmatrix, da:

$$P(X_n = v_4 \mid X_{n-1} = v_1) = P(X_n = v_4 \mid \text{Gehen } \cap X_{n-1} = v_1)\, P(\text{Gehen} \mid X_{n-1} = v_1) = \frac{1}{4}$$

Dies gilt da:

$$P(X_n = v_4 \mid X_{n-1} = v_1) = \frac{P\left(X_n = v_4, X_{n-1} = v_1\right)}{P\left(X_{n-1} = v_1\right)} = \frac{P\left(X_n = v_4, Gehen, X_{n-1} = v_1\right)}{P\left(X_{n-1} = v_1\right)}$$

$$= \frac{P(X_n = v_4 \mid Gehen,\ X_{n-1} = v_1) P(Gehen, X_{n-1} = v_1)}{P(X_{n-1} = v_1)}$$

$$= P(X_n = v_4 \mid \text{Gehen}, X_{n-1} = v_1)\, P(\text{Gehen} \mid X_{n-1} = v_1)$$

und daher:

$P(X_{n+1} = v_2 \,|X_n = v_1) = \frac{1}{4}$ ...

Es gilt:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

P erfüllt die Eigenschaften einer Übergangsmatrix, da:

$P_{i,j} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ und

$\sum_{j=1}^{4} P_{i,j} = 1$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Definition 2.2

Sei $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$ eine Folge von $k \times k$-Matrizen für die gilt: $P_{i,j} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ und $\sum_{j=1}^{k} P_{i,j} = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Ein Zufallsprozess $(X_0, X_1, \ldots)$ mit endlichem Zustandsraum $S=\{s_1,\ldots,s_k\}$ heißt inhomogene Markov-Kette mit Übergangsmatrizen $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$, falls für alle n, alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $i_0, \ldots i_{n-1} \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$P(X_{n+1} = s_j \mid X_0 = s_{i0}, X_1 = s_{i1}, \ldots, X_{n-1} = s_{i\,n-1}, X_n = s_i)$$

$$= P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i)$$

$$= P_{i,j}^{(n+1)}.$$

Theorem 2.2

Sei $(X_0, X_1, \ldots)$ ist eine inhomogene Markov-Kette mit Zustandsraum $S=\{s_1,\ldots,s_k\}$, Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ und Übergangsmatrizen $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$.
Für jedes n gilt:

$$\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^{(1)} P^{(2)} \cdots P^{(n)}.$$

Beweis per Induktion über n:

Induktionsanfang: Sei n = 1. Für alle j = 1, ... , k gilt:

$$\mu_j^{(1)} = P(X_1 = s_j) = \sum_{i=1}^{k} P(X_0 = s_i, X_1 = s_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(X_0 = s_i)\, P(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i)^{(1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(0)}\, (P_{i,j})^{(1)}$$

$$= (\mu^{(0)}P^{(1)})_j$$

Induktionsannahme: $\mu^{(m)} = \mu^{(0)}P^{(1)} \cdots P^{(m)}$ gilt für alle m.

Induktionsschritt: Sei n = m
$m \rightarrow m+1$

$$\mu_j^{(m+1)} = P(X_{m+1} = s_j) = \sum_{i=1}^{k} P(X_m = s_i, X_{m+1} = s_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(X_m = s_i)\, P(X_{m+1} = s_j \mid X_m = s_i)^{(m+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(m)}\, (P_{i,j})^{(m+1)}$$

$$= (\mu^{(m)}\, P^{(m+1)})_j$$

$\Rightarrow\ \mu^{(m+1)} = \mu^{(m)}\, P^{(m+1)}$

Nach Induktionsannahme gilt $\mu^{(m)} = \mu^{(0)}P^{(1)} \cdots P^{(m)}$ für alle m.

$\Rightarrow\ \mu^{(m+1)} = \mu^{(m)}\, P^{(m+1)} = \mu^{(0)}P^{(1)} \cdots P^{(m)}\, P^{(m+1)}$

$\square$

Problem 2.5

Sei $(X_0, X_1,...)$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S=\{s_1,...,s_k\}$ und Übergangsmatrix P.
Zu zeigen:
Für jedes m, n $\geq$ 0 gilt:

$$P(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_i) = (P^n)_{i,j}.$$

Beweis per Induktion nach n:

Induktionsanfang: Sei n = 1

Dann:

$$P(X_{m+1} = s_j \mid X_m = s_i) = P_{i,j} = (P^1)_{i,j}\,,\ \text{gilt nach Def. 2.1.}$$

Induktionsannahme: $P(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_i) = (P^n)_{i,j}$ gilt für alle n.

Induktionsschritt: $n \to n+1$. Für alle $j = 1, \dots, k$ gilt:

$$\mu_j^{(m+n+1)} = P(X_{m+n+1} = s_j) = \sum_{r=1}^{k} P(X_{m+n} = s_r, X_{m+n+1} = s_j).$$

Hier mit zusätzlicher Bedingung: $X_m = s_i$:

$$\begin{aligned}
P(X_{m+n+1} = s_j \mid X_m = s_i) &= \sum_{r=1}^{k} P(X_{m+n} = s_r, X_{m+n+1} = s_j \mid X_m = s_i) \\
&= \sum_{r=1}^{k} P(X_{m+n} = s_r \mid X_m = s_i)\, P(X_{m+n+1} = s_j \mid X_{m+n} = s_r, X_m = s_i) \\
&= \sum_{r=1}^{k} P(X_{m+n} = s_r \mid X_m = s_i)\, P(X_{m+n+1} = s_j \mid X_{m+n} = s_r) \\
&= \sum_{r=1}^{k} (P^n)_{i,r}\, P_{r,j} \\
&= (P^n P)_{i,j} \\
&= (P^{n+1)})_{i,j}
\end{aligned}$$

Die zweite Zeile folgt aus der Ersten durch Anwendung der Formel zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten.
Die Dritte Zeile folgt aus der Zweiten auf Grund der Markov Eigenschaft (zweiter Faktor).
Die vierte Zeile folgt aus der Dritten mittels der Induktionsannahme.
Die vierte Zeile stellt dann die Formel einer Matrixmultiplikation dar.

□

Problem 2.6

Sei $(X_0, X_1, \dots)$ ist eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S=\{s_1, s_2, s_3\}$, Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und Anfangsverteilung $\mu^{(0)} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Für jedes n definiere:

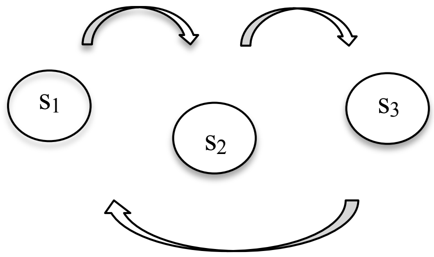
$$Y_n = \begin{cases} 0, \text{ falls } X_n = s_1 \\ 1, \text{ sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen: $(Y_0, Y_1, ...)$ ist *keine* Markov-Kette.

Beweis:

Betrachte $(X_0, X_1, ...)$. Aus P kann abgelesen werden:
$P(X_n = s_2 \mid X_{n-1} = s_1) = P(X_n = s_3 \mid X_{n-1} = s_2) = P(X_n = s_1 \mid X_{n-1} = s_3) = 1$, für alle anderen $P_{i,j}$ und $P_{i,i}$ mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt: $P_{i,j} = P_{i,i} = 0$.

Betrachte nun $(Y_0, Y_1, ...)$.



Es folgt:

$P(Y_n = 1 \mid Y_{n-1} = 0) = 1$
$P(Y_n = 0 \mid Y_{n-1} = 1) = 1$
$P(Y_n = 1 \mid Y_{n-1} = 1) = p$

Da:

$P(Y_n = 1 \mid Y_{n-1} = 1) = P (Y_n = 1 \mid X_{n-1} = s_2 \cup X_{n-1} = s_3)$

$$= \frac{P(\{Y_n = 1\} \cap \{X_{n-1} = s_2 \cup X_{n-1} = s_3\})}{P(\{ X_{n-1} = s_2\} \cup \{ X_{n-1} = s_3\})}$$

$$= \frac{P(\{Y_n = 1\} \cap \{ X_{n-1} = s_2\} \cup \{Y_n = 1\} \cap \{X_{n-1} = s_3\})}{P(\{ X_{n-1} = s_2\} \cup \{ X_{n-1} = s_3\})}$$

$$= \frac{P\left(Y_n = 1 , X_{n-1} = s_2\right) + P\left(Y_n = 1 , X_{n-1} = s_3\right)}{P\left(X_{n-1} = s_2\right) + P\left(X_{n-1} = s_3\right)}$$

$= \dfrac{1+0}{P\left(X_{n-1} = s_2\right) + P\left(X_{n-1} = s_3\right)}$, wobei der Nenner < 1, so dass $p > 1$.

Es ergibt sich also ein Widerspruch und es gilt:

Sei $S = \{s_1, s_2\} = \{0, 1\}$ der Zustandsraum von $(Y_0, Y_1, ...)$.
Dann ergäbe sich als Übergangsmatrix:

$$P_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix}$$

Dies widerspricht jedoch der Bedingung: $\sum_{j=1}^{k} P_{i,j} = 1$, für alle $i \in \{1,..., k\}$ einer Übergangsmatrix $\Rightarrow$ P_Y ist keine Übergangsmatrix.

$\Rightarrow$ $(Y_0, Y_1, ...)$ ist keine Markov-Kette. $\square$

Irreduzible und aperiodische Markov-Ketten

Im Folgenden werden homogene Markov-Ketten betrachtet

Sei $(X_0, X_1, ...)$ ist eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S=\{s_1,...,s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Man sagt: Zustand s_i kommuniziert mit einem anderen Zustand s_j, geschrieben $s_i \to s_j$, falls die Kette eine strikt positive Wahrscheinlichkeit besitzt jemals den Zustand s_j zu erreichen, unter der Bedingung, dass sie vom Zustand s_i startet.
In anderen Worten: s_i kommuniziert mit s_j, falls ein n existiert so dass

$$P(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_i) > 0.$$

Es gilt, dass diese Wahrscheinlichkeit auf Grund der Homogenität der Markov-Kette unabhängig von m ist und $(P^n)_{i,j}$ entspricht.

Falls gilt: $s_i \to s_j$ und $s_j \to s_i$, dann schreibt man $s_i \leftrightarrow s_j$, d.h. die Zustände kommunizieren miteinander (sind miteinander verbunden).

Definition 4.1

Eine Markov-Kette $(X_0, X_1, ...)$ mit Zustandsraum $S=\{s_1,...,s_k\}$ und Übergangsmatrix P heißt irreduzibel, falls für alle $s_i, s_j \in S$ gilt: $s_i \leftrightarrow s_j$.
Anderenfalls wird sie reduzibel genannt.

Anders ausgedrückt: Die Markov-Kette ist irreduzibel, falls es für jedes $s_i, s_j \in S$ ein n gibt, so dass $(P^n)_{i,j} > 0$.

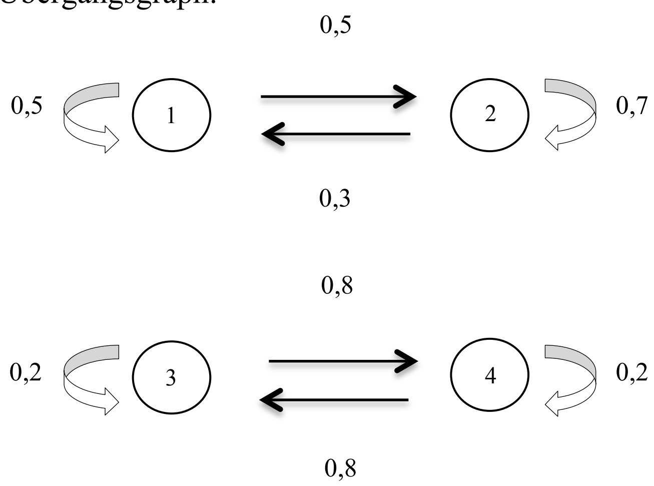
Irreduzibilität kann mithilfe des Übergangsgraphen überprüft werden.

Beispiel 4.1: Eine reduzible Markov-Kette

Sei $(X_0, X_1, ...)$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4\}$ und Übergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Übergangsgraph:



Abhängig von $\mu^{(0)}$ ist die Markovkette auf {1, 2} oder {3, 4} beschränkt.
Die Markov-Kette ist also reduzibel.

Falls sie im Zustand 1 oder 2 startet verhält sie sich wie eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S_1 = \{1, 2\}$ und Übergangsmatrix:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Falls sie jedoch im Zustand 3 oder 4 beginnt verhält sie sich wie eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S_2 = \{3, 4\}$ und Übergangsmatrix:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: Das Langzeitverhalten einer reduziblen Markov-Kette kann anhand des Langzeitverhaltens einer oder mehrerer Markov-Ketten mit kleinerem Zustandsraum analysiert werden.

Aperiodizität

Sei $\{a_1, a_2, ...\}$ eine endliche oder unendliche Menge positiver ganzer Zahlen.
Der Ausdruck gcd $\{a_1, a_2, ...\}$ bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler von $a_1, a_2, ...$ (gcd $\{a_1, a_2, ...\}$= ggT$\{a_1, a_2, ...\}$). Die Periode $d(s_i)$ des Zustandes $s_i \in S$ ist definiert als:

$d(s_i) = \gcd \{n \geq 1: (P^n)_{i,i} > 0\}$.

Das heißt: Die Periode von s_i ist der größte gemeinsame Teiler der Menge von Zeitpunkten in denen die Markov-Kette zum Zustand s_i zurückkehren kann, das heißt sie hat eine strikt positive Rückkehrwahrscheinlichkeit, vorrausgesetzt sie startet bei $X_0 = s_i$.
Falls $d(s_i) = 1$ heißt der Zustand s_i aperiodisch.

Definition 4.2

Eine Markov-Kette heißt aperiodisch, falls alle ihre Zustände aperiodisch sind. Andernfalls heißt sie periodisch.

Theorem 4.1

Sei $(X_0, X_1, \ldots)$ eine aperiodische Markov-Kette mit Zustandsraum $S=\{s_1,\ldots,s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Dann gibt es ein $N < \infty$ so dass

$$(P^n)_{i,i} > 0 \text{ für alle } i \in \{1,\ldots, k\} \text{ und alle } n \geq N.$$

Für den Beweis des Theorems wird folgendes Lemma verwendet:

Lemma 4.1

Sei $A = \{ a_1, a_2, \ldots \}$ eine Menge positiver ganzer Zahlen für die gilt:

(i) A ist teilerfremd, d.h. $\gcd \{ a_1, a_2, \ldots \} = 1$ und

(ii) A ist abgeschlossen unter Addition, d.h. für $a, a' \in A$, ist auch $a+a' \in A$.

Dann existiert eine ganze Zahl $N < \infty$ so dass $n \in A$ für alle $n \geq N$.

(Theorem 1.1 von Brémaud:

Sei d der g.c.d. von $A = \{a_n ; n \geq 1\}$, eine Menge positiver ganzer Zahlen die abgeschlossen ist unter Addition. Dann beinhaltet A alle, bis auf eine endliche Anzahl, der positiven Vielfachen von d.)

Für den Beweis ist folgendes Lemma (Vgl. Brémaud) notwendig, welches ich hier ohne Beweis angeben werde:

Lemma 1.2[2]

Seien $a_1, \ldots, a_k$ positive ganze Zahlen mit größtem gemeinsamen Teiler d. Es existieren $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ so dass $d = \sum_{i=1}^{k} n_i a_i$.

[2] Für den Beweis Vgl.: Brémaud, Pierre (1999). *Markov Chains. Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*. Springer-Verlag New York, Inc. S. 417, 418.

Beweis zu Theorem 1.1 (Brémaud) und Lemma 4.1:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass d = 1 (anderenfalls, teile alle a_n durch d). Für einige k gilt: d = 1 = g.c.d. (a_1, ..., a_k), und daher mit Lemma 1.2,

$1 = \sum_{i=1}^{k} n_i a_i$ für einige $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$.

Teile die positiven von den negativen Termen der letztgenannten Gleichung, es gilt
1 = M – P, mit M und P sind in A.
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq P(P - 1)$. Es gilt: n = aP + r, wobei $r \in [0, P - 1]$. Notwendigerweise, $a \geq P - 1$, anderenfalls, falls $a \leq P - 2$, dann $n = aP + r < P(P - 1)$.
Unter Verwendung von 1 = M – P gilt: n = aP + r (M – P) = (a-r)P + rM. Aber $a - r \geq 0$.
Daher gilt: n ist in A.
Wir haben folglich gezeigt, dass jedes $n \in \mathbb{N}$, welches groß genug ist –d.h. $n \geq P(P - 1)$– in A ist.[3]

Beweis zu Theorem 4.1:
Für $s_i \in S$ sei $A_i = \{ n \geq 1: (P^n)_{i,i} > 0\}$, d.h. A_i ist die Menge der möglichen Rückkehrzeitpunkte zu s_i, vorausgesetzt die Markov-Kette startet bei s_i.
Da die Markov-Kette aperiodisch ist, ist auch s_i aperiodisch, so dass A_i teilerfremd ist.
Weiterhin ist A_i abgeschlossen unter Addition da:
Falls $a, a' \in A_i$, dann gilt $P(X_a = s_i \mid X_0 = s_i) > 0$ und $P(X_{a+a'} = s_i \mid X_a = s_i) > 0$.
Dies impliziert, dass:

$$\begin{aligned} P(X_{a+a'} = s_i \mid X_0 = s_i) &\geq P(X_a = s_i, X_{a+a'} = s_i \mid X_0 = s_i) \\ &= P(X_a = s_i \mid X_0 = s_i)\, P(X_{a+a'} = s_i \mid X_a = s_i) \\ &> 0 \end{aligned}$$

so dass $a+a' \in A_i$.
Zusammenfassend: A_i erfüllt die Annahmen (i) und (ii) aus Lemma 4.1
$\Rightarrow \exists$ ein $N_i \in \mathbb{Z}$ mit $N_i < \infty$ so dass $(P^n)_{i,i} > 0$ für alle $n \geq N_i$.
Theorem 4.1 folgt nun mit $N = \max \{N_1, N_2, ... , N_k\}$.

Korollar 4.1

Sei $(X_0, X_1, ...)$ eine irreduzible aperiodische Markov-Kette mit Zustandsraum $S=\{s_1,...,s_k\}$ und Übergangsmatrix P.
Dann gibt es ein $M < \infty$ so dass $(P^n)_{i,j} > 0$ für alle $i, j \in \{1, ... , k\}$ und alle $n \geq M$.

Beweis:
Mittels der Aperiodizität und Theorem 4.1:
$\exists$ ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $N < \infty$ so dass $(P^n)_{i,i} > 0$ für alle $i \in \{1, ... , k\}$ und alle $n \geq N$.
Betrachte $s_i, s_j \in S$.
Mittels der Irreduzibilität:
$\exists$ $n_{i,j}$ so dass $(P^{n_{i,j}})_{i,j} > 0$.

[3] Das Theorem 1.1, sowie das Lemma 1.2 und der Beweis zu Theorem 1.1 bzw. Lemma 4.1 sind entnommen aus Brémaud (1999).

Sei $M_{i,j} = N + n_{i,j}$. Für jedes $m \geq M_{i,j}$ gilt:

$$P(X_m = s_j \mid X_0 = s_i) \geq P(X_{m-n\,i,j} = s_i, X_m = s_j \mid X_0 = s_i)$$
$$= P(X_{m-n\,i,j} = s_i \mid X_0 = s_i)\, P(X_m = s_j \mid X_{m-n\,i,j} = s_i)$$
$$> 0$$

Der erste Faktor der zweiten Zeile ist positiv, da $m\text{-}n_{i,j} \geq N$.
Der zweite Faktor ist positiv durch der Wahl von $n_{i,j}$.

$\Rightarrow (P^m)_{i,j} > 0$ für alle $m \geq M_{i,j}$.
Das Korollar 4.1 folgt nun mit: $M = \max \{M_{1,1}, M_{1,2}, \ldots , M_{1,k}, M_{2,1}, \ldots , M_{k,k} \}$.

□