

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Natur Wissenschaft
Angewandte Mathematik-Stochastik
Univ. Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea



M.Sc. Brice Hakwa

Zufallsprozesse und stochastische Integration

Chap 6: Monte-Carlo-Simulation

Motivation

1. In vielen Problemstellungen der Finanzmathematik und des Risikomanagements ist die Dynamik der zugrundeliegenden Variablen zu komplex, um exakte Lösungen bzw. Formeln zu erhalten. In solchen Fällen können die beteiligten stochastischen Variablen simuliert werden und basierend auf "Konvergenzsätze" aus der Stochastik die benötigten Zahlen approximiert werden.
2. **Beispiel** : Optionspreise zur Zeit $t = 0$ lassen sich als diskontierter Erwartungswert einer Funktion V (Auszahlungsfunktion) von Zufallsvariablen (z.B. Aktienkurs S) bestimmen.

$$V(S, 0) = e^{-rT} E(V(S, T)). \quad (1)$$

Somit sind alle Methoden, die geeignet sind, Erwartungswerte zu berechnen, auch potentielle Methoden zur Berechnung von Optionspreisen.

Erwartungswert als Integral

Sei X ein Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum. (Ω, \mathcal{F}, P) und eine reellwertige Funktion (Zufallsvariable) g mit $g(X) \in L^1(P)$ (P -integrierbar). Dann ist der Erwartungswert $E[g(X)]$ definiert als das Integral bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P . Es gilt:

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f(x) dx \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei sind F_X und f die Verteilungsfunktion (Bildmaß) bzw. die Dichte von X .

Integral als Erwartungswert

Sei nun $X \sim U(0; 1)$ das heißt der Definitionsmenge der Funktion g ist $[0; 1]$ ($g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$). Die Verteilung von X besitzt die Verteilung $\mathbf{1}_{(0;1)}(x)$ und für den Erwartungswert der Zufallsvariablen $g(X)$ gilt:

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot \mathbf{1}_{(0;1)}(x) dx \\ &= \int_0^1 g(x) dx \end{aligned} \tag{3}$$

Das heißt jeden Integral I der Form $I = \int_0^1 g(x) dx$ lässt sich als den Erwartungswert einer standard gleichverteilten Zufallsvariablen darstellen:

$$I = E[g(X)] \quad \text{mit } X \sim U(0; 1)$$

Monte-Carlo-Integration

I lässt sich manchmal nicht direkt bzw. exakt berechnen. Aber es ist möglich I zu approximieren, indem man N unabhängige Stichproben von X erzeugt ("simuliert") und dann I mit dem arithmetischen Mittel \tilde{I} der erzeugten Stichproben schätzen. Dabei muss N sehr groß sein damit \tilde{I} statistisch fundierte Aussagen liefern.

$$E(g(X)) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) = \tilde{I}. \quad (4)$$

Diese Methode wird **Monte-Carlo-Integration** genannt und es basiert auf das starke Gesetz der großen Zahl.

Gesetze der großen Zahl.

Gegeben sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n mit $E[X_i] < \infty$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Sei nun

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega),$$

dann besagen die Gesetze der großen Zahlen, dass für große n

$$\frac{S_n(\omega)}{n} \approx E\left[\frac{S_n}{n}\right] \text{ und für } E[X_i] = \mu \forall i, \frac{S_n(\omega)}{n} \approx \mu \quad (5)$$

gelten soll.

D. h., das arithmetische Mittel der ersten n Beobachtungen $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ soll nach der Gesetze der großen Zahlen gegen den Erwartungswert μ konvergiert.

Schwaches und Starkes Gesetze der großen Zahl.

1. Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Sei $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Folge unabhängiger reeller Zufallsvariablen aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und sei $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$ dann gilt für alle $\epsilon > 0$:

$$P \left[\left| \frac{S_n}{n} - \frac{E[S_n]}{n} \right| > \epsilon \right] \rightarrow 0 \quad \text{wenn } n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

2. Starkes Gesetz der großen Zahlen

Wenn zusätzlich $E[X_i] = \mu$ und $E[X_i^4] < \infty \quad \forall i$, dann gilt:

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit 1.} \quad (7)$$

Monte-Carlo-Simulation: Allgemein.

Sei p eine Wahrscheinlichkeitsmass auf einer abzählbaren Menge \mathcal{A} , und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable. Angenommen, wir wollen den Erwartungswert

$$m = E_p[f] = \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x) p(x) \quad (8)$$

Mittels Monte Carlo-Methode berechnen. Dafür simuliert man eine große Anzahl n unabhängiger Stichproben $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ von p und approximiert den Erwartungswert m durch den Monte Carlo-Schätzer

$$\hat{m}_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i(\omega)). \quad (9)$$

Eigenschaften von Monte Carlo-Schätzers.

1. \hat{m}_n ist ein erwartungstreuer Schätzer für m , d.h.:

$$E[\hat{m}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[f(X_i)] = E_p[f] = m$$

2. $\hat{m}_n \sim N\left(m, \frac{1}{n} \text{Var}_p[f]\right)$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{m}] &= \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i(\omega))\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n f(X_i(\omega))\right] \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}_p[f] \end{aligned}$$

3. \hat{m} ist eine konsistente Schätzfolge für m , falls $f^2(X)$ integrierbar ist.
D.h:

$$P[|\hat{m}_n - m| \geq \epsilon] \rightarrow 0 \quad \text{fr } n \rightarrow \infty$$

Approximationsfehler des Monte-Carlo-Schatzers.

Der mittlere quadratische Fehler des monte-carlo-Schatzers is:

$$E \left[|\hat{m}_n - m|^2 \right] = \text{Var} [\hat{m}_n] = \frac{1}{n} \text{Var}_p [f]. \quad (10)$$

Die Fehler-Ordnung des Monte-Carlo-Schätzers für $f \in \mathcal{L}^2$ ist dann:
Wenn $f \in L^2$ dann gilt:

$$\|\hat{m}_n - m\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{E \left[|\hat{m}_n - m|^2 \right]} = \mathcal{O} \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (11)$$

Dies bedeutet, dass für eine zusätzliche genaue Dezimalstelle (faktor 10) eines Schätzwerts die Zahl n der Auswertungen um den Faktor 100 erhöht werden muss.

Approximationsfehler des Monte-Carlo-Schatzers.

Theorem: (Chebychev-Ungleichung) Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2 . Dann gilt

$$P[|X - \mu| \geq \delta] \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2} \quad \text{oder} \quad P[|X - \mu| < \delta] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\delta^2} \quad \forall \delta > 0 \quad (12)$$

Anwendung der Chebychev-Ungleichung mit $X = \hat{m}_n$ ergibt

$$P[|\hat{m}_n - m| < \delta] \geq 1 - \frac{\text{Var}_p[f]}{n\delta^2} \quad \forall \delta > 0 \quad (13)$$

Wenn man in (13) $\delta = \frac{\sqrt{\text{Var}_p[f]}}{\sqrt{\epsilon n}}$ setze erhalte man

$$P\left[|\hat{m}_n - m| < \frac{\sqrt{\text{Var}_p[f]}}{\sqrt{\epsilon n}}\right] \geq 1 - \epsilon. \quad (14)$$

Das bedeutet, bedeutet, dass der Fehler umso kleiner wird, je grösser die Stichprobenzahl n .

Präzision und Konfidenzniveau des Monte-Carlo-Schatzers.

Wenn man in (13) $\delta = r\sqrt{\text{Var}_p[f]}$ setze erhalte man

$$P \left[|\hat{m}_n - m| < r\sqrt{\text{Var}_p[f]} \right] \geq 1 - \frac{1}{n r^2}. \quad (15)$$

Das bedeutet, dass der wahre Werte m befindet sich in der intervall

$$\left[\hat{m}_n - r\sqrt{\text{Var}_p[f]}, \hat{m}_n + r\sqrt{\text{Var}_p[f]} \right]$$

mit einer Wahrscheinlichkeit grösser als $\alpha = 1 - \frac{1}{n r^2}$ (bzw. $\alpha = 100(1 - \frac{1}{n r^2})\%$)

- ▶ r wird Präzision des Monte-Carlton-Schätzers genannt, und
- ▶ α ist der Konfidenzniveau des Monte-Carlton-Schätzers .

Behandlung der Präzision des Monte-Carlo-Schätzers .

Betrachten man die Gleichung (15):

$$P \left[|\hat{m}_n - m| < r \sqrt{\text{Var}_p [f]} \right] \geq 1 - \frac{1}{n r^2}. \quad (16)$$

D.h.

$$P \left[|\hat{m}_n - m| < r \sqrt{n \text{Var} [\hat{m}_n]} \right] \geq 1 - \frac{1}{n r^2}. \quad (17)$$

Die Präzision und somit die Genauigkeit des Monte-Carlo-Schätzers kann also

1. gemäss Gleichung (16) durch Hohe Anzahl der Simulationen n () und/ oder
2. gemäss Gleichung (17) durch Reduktion der Varianz des Schätzer ($\text{Var} (\hat{m}_n) = \frac{1}{n} \text{Var}_p [f]$)

verbessert werden.

Verbesserung der Präzision durch hohe Anzahl von Simulationen.

Will man zum Beispiel eine Präzision von 1% mit einem Konfidenzniveau von 95% erreichen . so muss die Anzahl der Simulationen n gewählt sodass

$$1 - \frac{1}{n r^2} = 1 - \frac{1}{n(0.01)^2} \geq 0.95$$

d.h.

$$n \geq \frac{1}{0.05(0.01)^2} = 200000 \text{ gilt.}$$

Verbesserung der Präzision Mittels Varianzreduktion.

Hier wird eine andere Zufallsvariable X' simuliert, sodass

$$E[f(X')] = E[f(X)] = m, \quad \text{mit } \text{Var}[f(X')] < \text{Var}[f(X)]. \quad (18)$$

Diese Verfahren wird Varianzreduktionstechnik genannt. Wählt man beispielweise X' sodass

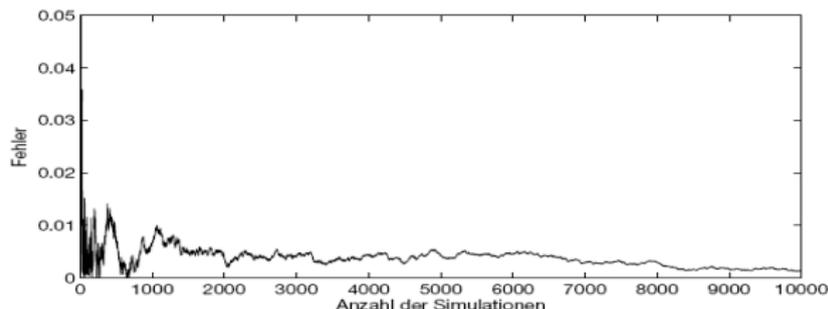
$$\text{Var}[f(X')] = \frac{1}{2} \text{Var}[g(X)] \quad (19)$$

Dies bedeutet, dass man $\frac{n}{2}$ Simulationen mit X' benötigt um die gleiche Präzision zu erreichen wie für n Simulationen mit X

Einige Varianzreduktionstechniken.

Für eine Einführende Auseinandersetzung mit der Technik der Varianzreduktion verweisen wir auf [1] Abschnitt 5.1. Dort sind zwei Methoden der Varianzreduktion Vorgestellt:

1. Abtrennung des Hauptteils und
2. antithetische Variablen.



Relativer Fehler bei der Berechnung des Preises einer europäischen Put-Option mit $K = 100$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$ und $S_0 = 80$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Monte-Carlo-Simulationen unter Verwendung antithetischer Variablen (Quelle: [1], Abb. 5.10)

Schätzung von Wahrscheinlichkeiten mittels MC-Simulation

Sei nun B eine abzählbare Menge dann gilt:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{b_i \in B} P(b_i) \quad \text{mit } B = \sum b_i \\ &= E_p[\mathbf{1}_B]. \quad (\mathbf{1}_B \text{ bezeichnet hier die Indikatorfunktion} \quad) \end{aligned}$$

Es gilt folglich nach dem Gesetz der großen Zahlen:

$$P(B) \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_B(X_i), \quad \text{mit } X_i \stackrel{iid}{\sim} P.$$

D.h. die relative Häufigkeit von Treffern ($\mathbf{1}_B(X_i)$) konvergiert mit wachsendem Stichprobenumfang gegen deren Wahrscheinlichkeit. Der Monte Carlo-Schätzer für $P(B)$ ist also gegeben durch:

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_B(X_i) \quad (20)$$

Approximation von π mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation

- ▶ **Grundidee:** Die Fläche eines Kreises mit Radius r ist gegeben durch

$$S = \pi \cdot r^2. \quad \text{und für } r=1 \text{ erhalten wir } S = \pi$$

- ▶ **Modell:** Man betrachtet einen Viertelkreis mit Radius 1, der von einem Quadrat mit Seitenlänge 1 begrenzt ist. D.h:

1. die Fläche des Viertelkreises $V = \frac{S}{4} = \frac{\pi}{4}$,
2. die Fläche des Einheitsquadrates $Q = 1$, und es gilt
3. $\frac{V}{Q} = \frac{\pi/4}{1}$

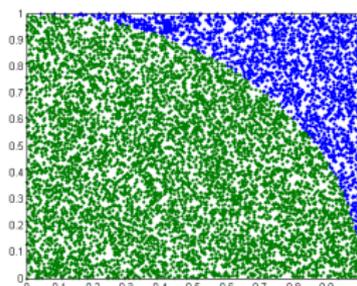
- ▶ **Vorgehensweise:**

1. Man generiert N zufällige Punkte $p(x, y)$ (bzw. x und y Koordinaten) des Quadrats. D.h. $p(x, y) \in [0, 1]^2$ und $X, Y \sim U(0; 1)$
2. Setze $B = \{p \mid x^2 + y^2 < 1\}$. (D.h $B =$ die Menge der Punkte im Viertelkreis) $\Rightarrow \frac{B}{N} \approx \frac{V}{Q} = \frac{\pi}{4}$
3. Der Monte Carlo-Schätzer für π ist dann:

$$\hat{\pi} = \frac{B}{N} \cdot 4$$

Matlab-Implementierung

```
N = input('Anzahl der Simulationen ');
B = 0;
zufall=rand(N,2);
temp=zeros(N,2);
for i=1:N
    x=zufall(i,1);
    y=zufall(i,2);
    IB = ((x2 + y2) <= 1);
    B = B + IB;
    temp(i,1) = x * IB;
    temp(i,2) = y * IB;
end
disp(['Anzahl der generierten Punkte: ' num2str(N) ' Anzahl der Punkte in B: ' ...
num2str(B)]);
π̂ = 4*B/N;
plot(zufall(:,1),zufall(:,2),'.',temp(:,1),temp(:,2),'.')
fprintf('Geschätzte π % f \n',π̂)
Anzahl der Simulationen 10000
Anzahl der generierten Punkte: 10000 Anzahl der Punkte in B: 786
Geschätzte pi 3.140800
```



Der Wiener prozess als Grunlagen der Stochastische Modellierung.

Definition: Ein stochastischer Prozess $W = \{W(t), t \geq 0\}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) heißt (Standard-)Wiener-Prozess, wenn die vier folgenden Bedingungen gelten:

1. $W(0) = 0$ (P-fast sicher).
2. Für gegebenes s mit $t > s \geq 0$ sind alle Inkremente $W(t) - W(s)$ von \mathcal{F}_s stochastisch unabhängig. Der Wiener-Prozess hat also unabhängige Zuwächse.
3. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s) \sim \sqrt{t - s} \mathcal{N}(0, 1) \forall 0 \leq s < t$. Die Zuwächse sind also stationär und normalverteilt mit Mittelwert Null und Varianz $t - s$.
4. Die einzelnen Pfade sind (P-)fast sicher stetig.

Diskretisierung vom Wiener-Prozess.

Die diskrete Approximation eines W -Prozesses erfolgt durch folgendes Vorgehen: Sei $\Delta t > 0$ ein konstantes Zeitinkrement. Für $t_k := k\Delta t$ lässt sich W_t als Summe von Zuwächsen ΔW_j für $j = 0 : k$ darstellen:

$$W_{k\Delta t} = \sum_{j=1}^k (W_{j\Delta t} - W_{(j-1)\Delta t}) = \sum_{j=1}^k \Delta W_j, \quad (21)$$

wobei $\Delta W_0 = 0$ und $\Delta W_j \sim \sqrt{\Delta t} \mathcal{N}(0, 1)$.

Wir betrachten jetzt ein diskretes Zeitintervall $[0, T]$ und legen das folgendes Gitter fest:

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Sodass
 $\Delta t = t_{j+1} - t_j = \frac{T}{n}$, $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$.

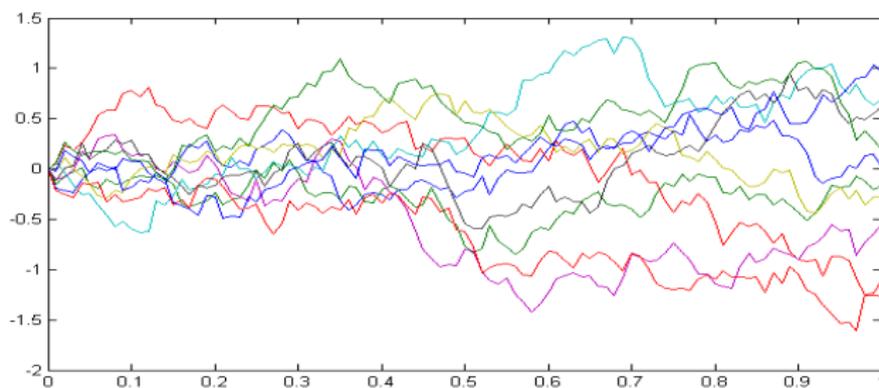
Wir erhalten dann:

$$W(T) = \sum_{j=1}^n W(t_j) - W(t_{j-1}) \quad (22)$$

mit $W(t_j) - W(t_{j-1}) \sim \sqrt{\Delta t} \mathcal{N}(0, 1)$.

Simulation vom Wiener-Prozess.

```
m=10;  
n=100;  
h=1/n;  
T=[0:h:1];  
dW=randn(n,m);  
W=cumsum([zeros(1,m);sqrt(h)*dW]);  
plot(T,W)
```



Stochastische Modellierung von Finanzvariable: z.B.

Black-Scholes-Modell.

Im Black-Scholes-Modell ist die Dynamik des zugrunde liegenden Wertpapiers S gegeben durch die folgende (ito)stochastische Differentialgleichung:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad S(0) = s_0 \quad (23)$$

mit Anfangswert s_0 , konstantem risikofreien Zinssatz $r = \mu \geq 0$, konstanter Volatilität $\sigma > 0$ und einem Wiener-Prozess W (D.h. $dW(t)$ sind die Zuwächse von W).

Hier sind folgenden Bezeichnungen verwenden:

- ▶ $S(t)$: Basiswert zur Zeit t
- ▶ $S = \{S(t), t \geq 0\}$: Basiswertsprozess

Ito stochastischer Differentialgleichungen.

Sei W_t der Wiener-Prozess. Ein stochastischer Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ heißt Ito-Prozess, falls

$$X_t - X_0 = \int_0^t \mu(X_u, u) du + \int_0^t \sigma(X_u, u) dW_u. \quad (24)$$

In Differentialschreibweise

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t, \quad (25)$$

mit $\mu(X_u, u)$ und $\sigma(X_u, u)$ zwei messbaren und adaptierten Funktionen sodass

$$P \left\{ \int_0^t |\mu(X_u, u)| ds < \infty \right\} = 1 \quad \text{und} \quad P \left\{ \int_0^t |\sigma^2(X_u, u)| ds < \infty \right\} = 1$$

- ▶ $\mu(X_t, t) dt$ heißt Driftterm und
- ▶ $\sigma(X_t, t) dW_t$ heißt Diffusionsterm.

Lösbarkeit von stochastischer Differentialgleichungen.

Für die stochastische Differentialgleichung (25) existiere eine eindeutige Lösung auf $[0, T]$ wenn es Konstante C und D gibt sodass die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

$$\begin{aligned} |\mu(x, t)| + |\sigma(x, t)| &\leq C(1 + |x|); \\ |\mu(x, t) - \mu(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| &\leq D|x - y|; \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, T]$.

Bemerkung: Die Black-Scholes SDE (23) ist per Definition eine Ito-SDE und sie erfüllt die beiden oben genannten Bedingungen. Ihre exakte eindeutige Lösung ist explizit gegeben durch:

$$S(t) = s_0 \exp \left[\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right) \right]. \quad (26)$$

Für komplexere Modelle ist oft die zugrundeliegende SDE nicht analytisch lösbar. Hier werden numerische Methoden zur Diskretisierung der zugrunde liegende SDE eingesetzt.

Numerische Approximation von SDE.

Das Euler-Maruyama-Verfahren, ist das einfachste Verfahren zur numerischen Lösung von stochastischen Differentialgleichungen. Es basiert auf dem deterministischen expliziten Euler-Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Seien $\{W_t, t \geq 0\}$, ein Wiener-Prozess und die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = a(t, S_t) dt + b(t, S_t) dW_t. \quad (27)$$

Die Idee von Maruyama besteht nun darin, nicht nur die Zeitachse in ein Gitter $\{\Delta t, t \in \mathbb{N}\}$ zu diskretisieren, sondern auch die Wahrscheinlichkeitsachse. Dazu definiert man

$$\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t, t \in \mathbb{N} \quad (28)$$

Wir betrachten das diskret Form von (28)

$$\Delta S_t = a(t, S_t) \Delta t + b(t, S_t) \Delta W_t \quad (29)$$

das Euler-Maruyama-Verfahren, angewandt auf (23) ergibt dann:

$$\Delta S_{t+\Delta t} = S_t + \mu(S_t, t) \Delta t + \sigma(S_t, t) \Delta W_t \quad (30)$$

Wie gut ist Euler-Maruyama.

Es gibt im allerdings verschiedene Konvergenzbegriffen mit der man die Güte von numerischen (approximativen) Lösung stochastischer Differentialgleichungen analysieren kann. Aber je nach dem, was zu berechnen ist, wird verschiedene Konvergenzbegriffe benötigt. Für die Optionbewertung reicht es folgenden Konvergenzbegriffen aus:

1. **Starke Konvergenz** : Hier wird die Approximation der gesamten Pfade bzw. Trajektorien von S zu beurteilt.
2. **Schwache Konvergenz**: Bei der schwachen Konvergenz interessiert man sich an der Approximation von der statistischen Eigenschaften.

Fazit:

- ▶ Für die Bewertung von Pfadunabhängigen Optionen (z.B. europäische Option) reicht es aus, Verfahren mit schwacher Konvergenz zu verwenden.
- ▶ Verfahren mit starker Konvergenz sind geeignet für die Bewertung von Pfadabhängigen Optionen (z.B. Lookback-Option, Asiatische Optionen).

Starke und schwache Konvergenz.

Definition (Starke konvergent [1] Def. 5.10)

Sei x_t eine Lösung einer SDE und $x_t^{\Delta t}$ eine numerische Lösung mit Schrittweite Δt . Wir sagen, $x_t^{\Delta t}$ konvergiert stark mit der Ordnung $\gamma > 0$ gegen x_T zur Zeit T , wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle (genügend kleinen) $\Delta t > 0$ gilt:

$$\varepsilon(\Delta t) = E\left(|x_T - x_T^{\Delta t}|\right) \leq C\Delta t^\gamma. \quad (31)$$

Definition (schwache konvergent [1] Def. 5.11)

Sei x_t eine Lösung einer SDE und $x_t^{\Delta t}$ eine Approximation von x_t . Wir nennen $x_t^{\Delta t}$ schwach konvergent bezüglich g mit der Ordnung $\gamma > 0$ zur Zeit T , wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle (genügend kleinen) $\Delta t > 0$ gilt:

$$|E(g(x_T)) - E(g(x_T^{\Delta t}))| \leq C\Delta t^\gamma. \quad (32)$$

Im Falle $g = id$ (id - identischer Operator) nennen wir $x_t^{\Delta t}$ schwach konvergent mit der Ordnung γ .

Theorem Das Euler-Maruyama Verfahren konvergiert stark mit Ordnung 0.5 und schwach mit Ordnung 1. (siehe [1] s. 120-122)

Exakte Lösung VS. Euler-Maruyama approximation

Matlab Code:

```
randn('state',88)
 $\mu = 2; \sigma = 1; s_0 = 1;$ 
T = 1; N = 300; dt = T/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
W = cumsum(dW);
 $S_e = s_0 * \exp((\mu - 0.5 * \sigma^2) * ([dt : dt : T]) + \sigma * W);$ 
plot([0:dt:T],[s_0,S_e],'b-'), hold on
R = 4; Dt = R*dt; L = N/R;
S_e m = zeros(1,L);
DW = sum(dW(1:R));
 $S_e m(1) = s_0 + s_0 * \lambda * Dt + \mu * s_0 * DW;$ 
for j = 2:L
     $DW = \text{sum}(dW(R * (j - 1) + 1 : R * j));$ 
     $S_e m(j) = S_e m(j - 1) + Dt * \lambda * S_e m(j - 1) + \mu * S_e m(j - 1) * DW;$ 
end
plot([0:Dt:T],[s_0,S_e m],'r--*'), hold off
xlabel('t') ylabel('S')
```

Vergleich Exakte Lösung (Gl. (26)) mit der Euler-Maruyama Approximation (Gl. 30) der Black-Scholes SDE (Gl. 23).

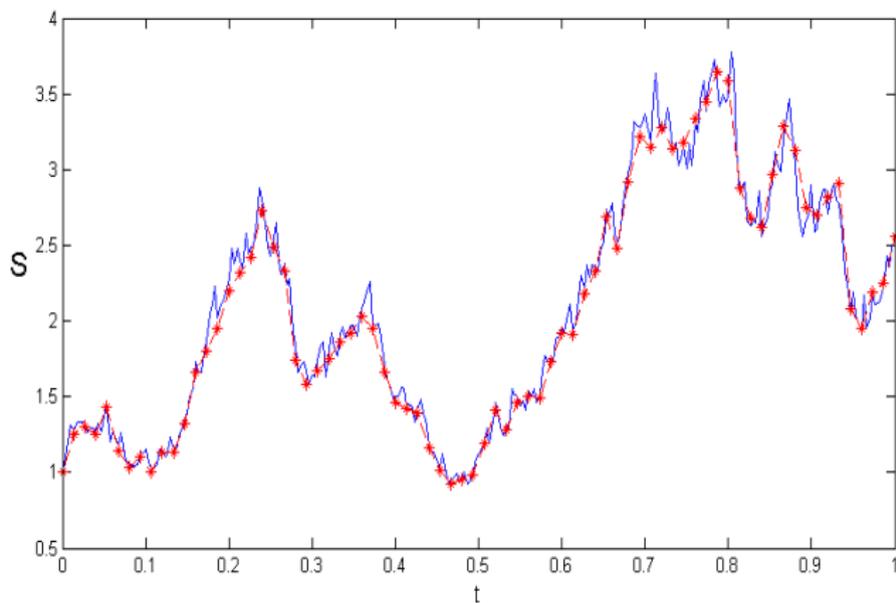


Abbildung: Exakte Lösung (blau) , em-Approximation (rot)

Grundlagen der Bewertung von Finanzderivaten.

Nach dem Prinzip der **risikoneutralen Bewertung**, ist der Wert einer Option $V(t, S)$ zum Zeitpunkt $t \leq T$ gegeben durch:

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)} E(V(S, T)). \quad (33)$$

D.h. der faire Preis $V(S, 0)$ eines Options auf S ist gegeben durch den diskontierter Erwartungswert von $V(S, T)$.

Der Optionswert $V(S, t)$ zur Zeit t hängt im allgemein von der **Optionstyp**, der Laufzeit T , dem Strike K , und dem Basiswertsprozesse S (Pfade von S) bis zur Zeitpunkt t ab.

Wir haben z.B.:

- ▶ $V(S, T) = (S(T) - K)^+$ Für Europäische Call-Option
- ▶ $V(S, T) = \left(S_T - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right)^+$, Für Asiatische Call Option

Optionsbewertung mit Monte-Carlo-Simulation I

Basierend auf das Prinzip der **risikoneutralen Bewertung** besteht die Grundidee der Monte-Carlo-Simulation für die Optionsbewertung darin, den Erwartungswert in Gl. (33) mittels monte-carlo-Methode zu schätzen. Der Algorithmus besteht aus vier Schritten:

1. Bestimme eine Formel für $V(S, t)$ in Abhängigkeit vom Optionstyp.
2. Simulation N Pfade des Basiswertsprozesses S
3. Berechnung der Auszahlungsfunktion: $V(S, T)$
4. Berechne eines Schätzers für den Erwartungswert in Gl. (33).

$$\hat{E}(V_T) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V_{T,k},$$

5. Schätze des fairen Optionspreises durch:

$$\hat{V} := e^{-rT} \hat{E}(V_T).$$

Optionsbewertung mit Monte-Carlo-Simulation II.

Je nach Art und / oder Type des Options benötigt man in Schritt 2 entweder:

1. Nur der Wert des Prozesses S zum Zeitpunkt T (Ein Zufall Variable),:

$$S_T(\omega) : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R} \text{ (z.B. Europäische plain vanilla Option.)}$$

2. oder alle Werten von Zeitpunkt t_0 bis zum Zeitpunkt T (der gesamte Pfad des Prozesses:).

$$S(\omega, T) : \Omega \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R} \text{ (z.B. Asiatische Option)}$$

Monte-Carlo-Simulation fuer europaeischen Put und Call-Option ($V_{Put} = 19.5836, V_{Call} = 8.5569$)

Matlab Code:

```
K = 100; r = 0.05; sigma = 0.2; T = 1;
randn('state',88)
K = 100; r = 0.1; sigma = 0.4; T = 1; S0 = 80;
n = 50; h = 1/n; M = 10000;
% Simultane Erzeugung der M Pfade der Wiener-Prozesse
dW = sqrt(h)*randn(n,M);
% Simultane Berechnung der Aktienkurse für alle M Pfade
S = zeros(n+1,M);
S(1,:) = S0; % Anfangswerte
for i = 1:n
    S(i+1,:) = S(i,:).*(1 + r*h + sigma*dW(i,:));
end
% Simultane Berechnung der Auszahlungsfunktion
payoffPut = max(0, K - S(n+1,:));
payoffCall = max(0, S(n+1,:) - K);
% Simultane Berechnung des Schätzers und der Optionspreise
VPut = exp(-r * T) * (mean(payoffPut))
VCall = exp(-r * T) * (mean(payoffCall))
```

Exkurs: Black-Scholes-Formel

$$C(S, T) = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) \quad (34)$$

$$P(S, T) = Ke^{-rT} \Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) \quad (35)$$

wobei

$$d_{1/2} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (36)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (37)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Dabei bezeichnet:

- ▶ S_0 : aktueller Aktienkurs,
- ▶ r : der risikolose Zinssatz,
- ▶ σ : Die Volatilität des Basiswertes,
- ▶ T : Laufzeit (Fälligkeitstermin),
- ▶ K : der Basispreis,

Anwendung der Black-Scholes-Formel auf die obige Option ergibt

Put=19.3803

Reference

-  Günther, Michael and Jünger, Ansgar: *Finanzderivate mit Matlab. Mathematische Modellierung und Numerische Simulation*, 2nd ed. Vieweg Verlag, (2010),
-  D. J. Higham: *An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations*. SIAM Review, 43:525546, 2001.
-  B. Oksendal: *Stochastic Differential Equations*, 6th ed. Springer, Berlin, (1998)
-  P. Kloeden und E. Platen: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, 1999