Supplement

Risikotheorie

Angefertigt am

Institut für angewandte Mathematik

in Arbeitsgruppe Stochastik

bei Univ. Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea

getippt in tex von B.Sc. Sergiy Bogdanov

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Bergischen Universität Wuppertal

Sommersemester 2016

Inhaltsverzeichnis

0.1 Abkürzungs- und Namensverzeichnis

ZV	Zufallsvariable, Zufallsvariablen
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum, W-Raum

1 Einführung

1.1 Wert im Risiko

Wir notieren wie üblich $\mu\big((-\infty,x]\big) = F_L(x) = \mathbb{P}(L \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy.$

Definition 1.1.1. *Sei L ZV auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Sei $\alpha \in (0,1)$ fixiert. Der **Wert im Risiko (Value at Risk)** der ZV L mit **Konfidenzniveau** α ist*

$$VaR_\alpha(L) := \inf\{l \in \mathbb{R} \,|\, \mathbb{P}\,(L > l) \leq 1-\alpha\}.$$

Bemerkung 1.1.2. *α wird meistens zu $0.95, 0.9, 0.99$ gesetzt.*

Interpretation: L beschreibt ein Risiko oder Verlust (L *loss*). Wir suchen den kleinsten Wert im Risiko l, s.d. die W-keit, dass der Verlust größer als l höchstens $1-\alpha$ ist.

Bemerkung 1.1.3. *Sei F_L die Verteilungsfunktion der ZV L, dann*

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} \,|\, 1 - F_L(l) \leq 1-\alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} \,|\, F_L(l) \geq \alpha\} \equiv q_L(\alpha),$$

*ist auch der **Quantil** der ZV L in α.*

Bemerkung 1.1.4. *In der Statistik interessiert man wie sich das Quantil $q_L(\alpha)$ für eine gegebene ZV L in Abhängigkeit von α ändert. In der Risikotheorie fixiert man α und untersucht wie sich $VaR_\alpha(L)$ in Abhängigkeit von L ändert.*

Bemerkung 1.1.5.

(a) Falls F_L stetig ist, so gilt

$$sup\{l \in \mathbb{R} \mid F_L(l) < \alpha\} = inf\{l \in \mathbb{R} \mid F_L(l) \geq \alpha\} = q_L(\alpha) = VaR_\alpha(L);$$

(b) Falls F_L stetig und streng monoton steigend ist, so ist F_L invertierbar, d.h. $\exists F^{-1} : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R}\ F^{-1}(F(x)) = x\ \wedge\ \forall y \in (0,1)\ F(F^{-1}(y)) = y;$

(c) Falls F_L eine Dichte hat, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$, so ist $F_L(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ eindeutige streng monotone Verteilungsfunktion, und folglich existiert wieder die F^{-1} als Funktion;

(d) Sei L eine ZV dessen Verteiungsfunktion streng monoton und stetig ist, so ist $VaR_\alpha(L) = q_L(\alpha) = F_L^{-1}(\alpha)$.

Generell können wir festhalten, dass eine ZV L hat ein *großes Restrisiko* falls $\mathbb{P}(L > l) = 1 - F_L(l)$ auch für große Werte von l groß ist. Z. B. falls ZV L eine Dichte hat $f(x) > 0$, die langsam nach Null geht für $|x| \to \infty$, so hat sie ein großes Restrisiko.

Definition 1.1.6. *Verteilungen mit großer Restrisiko nennt man Verteilungen mit* ***fat tails****.*

Damit F_L ein *fat tail* hat, muß der Abstand von Verteilungsfunktion zu Gerade $= 1$ "immer sehr groß" bleiben. Das ist z.B. nicht der Fall, falls F_L eine Dichte hat, die exponential nach Null geht oder allg. falls $1 - F_L(x) \sim exp(-x)$ für große Werte von x oder wenn sogar $\forall x \geq x_0$ $F_L(x) = 1$.

Beispiel 1.1.7. *Verteilungen die keine fat teils haben:*

(a) $L \sim U_{[a,b]}$ uniforme Verteilung;

(b) $L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ Normalverteilung;

(c) $L \sim \mathcal{X}^2$, wobei $\mathcal{X}^2 \sim \big(\mathcal{N}(0,1)\big)^2$ Chi-Quadrat-Verteilung;

(d) $L \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ Logarithmische Normalverteilung;

(e) $L \sim exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ Exponentialverteilung;

(f) $L \sim WB(b, T)$, $b \geq 0$, $T > 0$ Weibull-Verteilung;

(g) $L \sim Gamma(\kappa, \beta)$ Gammaverteilung.

Beispiel 1.1.8. *Verteilung, die fat tail hat ist die Pareto-Verteilung. Eine Pareto-verteilte ZV $L \sim Par(x_0, a)$, $x_0 > 0$, $a > 0$ hat folgende Dichte bzw. Verteilungsfunktion*

$$f(n) = \begin{cases} a x_0^a x^{-a-1} & \textit{falls } x \geq x_0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \quad \textit{bzw.} \quad F(n) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-a} & \textit{falls } x \geq x_0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

1.2 Bedingter Erwartungswert

Satz 1.2.1. *Sei $\mathbb{P}$ ein W-maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ und $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$. Dann wird durch $\mathbb{P}(\,\cdot\,|A) : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$, $B \longmapsto P(B|A) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ eienen neuen W-maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert.*

Beweis. Es ist $P(B|A) = \frac{\mathbb{P}(\varnothing \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = 0$ und $P(\Omega|A) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$. Dazu ist $\mathbb{P}(\,\cdot\,|A)$ additiv und σ-additiv, da für $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt, ist auch $(B_n \cap A)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt. □

Definition 1.2.2. $\mathbb{P}(\,\cdot\,|A)$ *ist die **Wahrscheinlichkeit bedingt des Ereignis** A.*

Bemerkung 1.2.3. $\mathbb{P}(\,\cdot\,|A)$ *hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\mathbb{P}(B|A) = 0$ *falls* $B \subseteq A^c$*;*

(b) $\mathbb{P}(A|A) = 1$*;*

(c) $P(C|A) = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A)}$ *falls* $C \subseteq A$*.*

Definition 1.2.4. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum. $A, b \in \mathcal{F}$ heißen **stochastisch unabhängig**, $A \perp B$, falls $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

Bemerkung 1.2.5. *Es gilt $A \perp B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = A \;\wedge\; \mathbb{P}(B|A) = B$, falls $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$ gilt.*

Bemerkung 1.2.6. *Aus $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$ folgt $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$, ist also $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(B) = 0$, so folgt $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ und demnach $A \perp B$.*

Notation: Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann schreiben wir $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$.

Erinnerung: Eine Funktion $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ist eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ falls $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, d.h. falls X $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

Definition 1.2.7. *Seien X, Y reellwertige ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann heißen X, Y* ***stochastisch unabhängig****, $X \perp\!\!\!\perp Y$, falls $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $X^{-1}(A) \perp Y^{-1}(B)$, d.h. $\mathbb{P}(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))\mathbb{P}(Y^{-1}(B)) = \mu_X(A)\mu_Y(B)$.*

Definition 1.2.8. *Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

(a) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ***stochastisch unabhängig****, falls für alle $n_1, ..., n_l$, $l \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(A_{n_1} \cap ... \cap A_{n_l}) = \mathbb{P}(A_{n_1})...\mathbb{P}(A_{n_l})$;*

(b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ***paarweise stochastisch unabhängig****, falls für alle $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ gilt $A_i \perp A_j$.*

Bemerkung 1.2.9. *Die stochastische Unabhängigkeit impliziert paarweise stochastische Unabhängigkeit, die Rückrichtung ist aber im Allgemein falsch.*

Definition 1.2.10. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellwertigen ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ***stochastisch unabhängig****, falls für alle $n_1, ..., n_l \in \mathbb{N}$ und für alle $A_{n_1}, ..., A_{n_l} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $l \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathbb{P}(X_{n_1}^{-1}(A_{n_1}) \cap ... \cap X_{n_l}^{-1}(A_{n_l})) = \mathbb{P}(X_{n_1}^{-1}(A_{n_1}))...\mathbb{P}(X_{n_l}^{-1}(A_{n_l}));$$

(b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* ***paarweise stochastisch unabhängig****, falls für alle* $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ *und für alle* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *gilt*

$$\mathbb{P}(X_i^{-1}(A) \cap X_j^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X_i^{-1}(A))\mathbb{P}(X_j^{-1}(B)).$$

Definition 1.2.11. *Zwei ZV* X, Y *heißen* ***unkorreliert****, falls* $\mathbb{E}[X, Y] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

Bemerkung 1.2.12. $X \perp\!\!\!\perp Y$ *impliziert Unkorreliertheit, die Rückrichtung ist aber im Allgemein falsch.*

Bemerkung 1.2.13. *Sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von ZV auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, die paarweise unkorreliert ist und sei* $X_n \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gilt*

$$Var\Big(\sum X_n\Big) = \sum Var(X_n).$$

Definition 1.2.14. *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein W-Raum,* $A \in \mathcal{F}$*,* $\mathbb{P}(A) > 0$*. Sei* X *eine ZV auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *dann ist* $\mathbb{E}[X|A]$ *der* ***Erwartungswert von*** X *bzgl.* $\mathbb{P}$ ***bedingt*** A *oder* ***Erwartungswert bedingt*** *der W-keit* $\mathbb{P}$*,* ***dass Ereignis*** A ***statt findet****,* $\mathbb{E}[X|A] := \int X d\mathbb{P}(\,\cdot\,|A)$.

Bemerkung 1.2.15. *Es gilt*

(a) $\mathbb{E}[X] = \int X d\mathbb{P} = \int x d\mu$;

(b) $\mathbb{E}[X|A] = \int X d\mathbb{P}(\,\cdot\,|A) = \int x d\mu_X^A$*, wobei* μ_X^A *ist die durch* $\mathbb{P}(\,\cdot\,|A)$ *induzierte Verteilung von* X*.*

Bemerkung 1.2.16. $X \perp\!\!\!\perp \mathbb{1}_A \iff \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \perp A$.

Bemerkung 1.2.17. *Ist* $X \perp\!\!\!\perp \mathbb{1}_A$*, so wegen* $\mathbb{P}(X^{-1}(B) \cap A) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))\mathbb{P}(A)$ *gilt* $\mathbb{P}(X^{-1}(B)|A) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ *und somit* $\mathbb{E}[X|A] = \mathbb{E}[X]$.

1.3 Tail-Value at Risk und Conditional Tail-Value at Risk

Definition 1.3.1. *Sei L eine ZV. Der* ***Tail Value at Risk*** *von L definiert durch $TVaR_\alpha(L) := \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_s(L)ds$.*

Lemma 1.3.2. *Sei F_L streng monoton und stetig, so gilt*

$$TVaR_\alpha(L) = \frac{1}{\mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L))}\int_\alpha^1 VaR_s(L)ds.$$

Beweis. Es ist $VaR_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha)$, folglich

$$\mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L)) = 1 - F_L(VaR_\alpha(L)) = 1 - F_L(F_L^{-1}(VaR_\alpha(L))) = 1 - \alpha.$$

$\square$

Definition 1.3.3. *Sei L ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $CTVaR_\alpha(L) := \mathbb{E}[L|L > VaR_\alpha(L)]$ wird* ***Conditional Tail-Value at Risk*** *α genannt.*

Lemma 1.3.4. *Sei L ZV, $L \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt $\mathbb{E}[L] = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(L > s)ds$.*

Beweis. Wir beweisen den Fall, wo L eine Dichte $f(x)$ hat. Der Satz gilt allerdings allgemein. $\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(L > S)ds = \int_{\mathbb{R}} 1 - F_L(s)ds = \int_{\mathbb{R}}\int_s^{\infty} f(x)dxds = \int_{\mathbb{R}} f(s)\int_0^s dxds = \int_{\mathbb{R}} sf(s)ds = \mathbb{E}[L]$. $\square$

Satz 1.3.5. *Sei F_L streng monoton und stetig, dann gilt*

$$TVaR_\alpha(L) = CTVaR_\alpha(L).$$

.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
TVaR_\alpha(L) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\alpha(L)ds = \frac{1}{\mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L))}\int_\alpha^1 VaR_s(L)ds \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L))}\int_\alpha^1 q_L(s)ds = \frac{1}{\mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L))}\int_\alpha^1 F_L^{-1}(s)ds \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L))}\int_{VaR_\alpha(L)}^\infty 1 - F_L(s)ds \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L))}\int_{VaR_\alpha(L)}^\infty \mathbb{P}(L > s)ds \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L))}\int_{-\infty}^\infty \mathbb{P}(L > s \wedge L > VaR_\alpha(L))ds \\
&= \int_{-\infty}^\infty \mathbb{P}(L > s \big| L > VaR_\alpha(L))ds \\
&= \mathbb{E}\left[L > s \big| L > VaR_\alpha(L)\right]ds.
\end{aligned}
$$

□

1.4 Risikokennzahlen und ihre Eigenschaften

Notation: Sei $ZV(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ die Menge aller reellwertigen ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definition 1.4.1. *Eine* ***Risikokennzahl*** *auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ist eine Funktion* $\varphi : ZV(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R},\ L \mapsto \varphi(L)$.

Definition 1.4.2. *Seien* $L, L_1, L_2 \in ZV(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *. Eine Risikokennzahl* φ *auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *heißt* ***kohärent****, falls sie folgende Eigenschaften hat:*

(1) φ *ist* ***monoton****,* $\left[L_1 \leq L_2 \ f.s. \implies \varphi(L_1) \leq \varphi(L_2)\right]$ *, d.h. ist der Verlust* L_1 *mit Sicherheit kleiner-gleich als der Verlust* L_2*, so soll dies für entsprechende Risiken gelten;*

(2) φ *ist* ***homogen****,* $\left[\forall \lambda > 0 \ \varphi(\lambda L) = \lambda\varphi(L)\right]$*, d.h. das Risiko des* λ*-faches Verlustes* L *soll auch* λ*-fach mal größer sein;*

*(3) φ ist **translationsinvariant**, $\left[\forall c \in \mathbb{R}\ \varphi(L+c) = \varphi(L) + c\right]$, d.h. falls der Verlust sich um eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ erhöht, so steigt auch das Risiko um c an;*

*(4) φ ist **subadditiv**, $\left[\varphi(L_1 + L_2) \leq \varphi(L_1) + \varphi(L_1)\right]$, d.h. das Risiko additiver Verluste ist kleiner-gleich als die Summe von einzelnen Risiken.*

Bemerkung 1.4.3. *Die Eigenschaft* (4), *die Subadditivität, wird in einer Portfoliostrategie für Diversifikation genutzt.*

Beispiel 1.4.4.

- *$\varphi(L) := \mathbb{E}(L)$ ist eine Kohärente Risikokennzahl;*

- *$\varphi(L) := CTVaR_\alpha(L)$ ist eine Kohärente Risikokennzahl.*

Behauptung 1.4.5. *VaR_α ist keine kohärente Risikokennzahl.*

Beweis.

- $VaR_\alpha(L) = inf\{l \mid \mathbb{P}(L > l) \leq l\}$ ist monoton, denn falls $L_1 \leq L_2$ f.s., so gilt auch für alle $l \in \mathbb{R}$, dass $\mathbb{P}(L_1 > l) \leq \mathbb{P}(L_2 > l)$ f.s., also auch $VaR_\alpha(L_1) \leq VaR_\alpha(L_2)$.

- $VaR_\alpha(L)$ ist homogen: falls F_L streng monoton und stetig, $VaR_\alpha(\lambda L) = \lambda VaR_\alpha(L) \Leftrightarrow F_{\lambda L}^{-1}(\alpha) = \lambda F_L^{-1}(\alpha)$. Also $F_{\lambda L}(\alpha) = \mathbb{P}(\lambda L \leq x) = \mathbb{P}(L \leq \frac{x}{\lambda}) = F_L(\frac{x}{\lambda})$ impliziert $F_{\lambda L}(\lambda F_L^{-1}(\alpha)) = \alpha$ und folglich $F_{\lambda L}^{-1}(\alpha) = \lambda F^{-1}(\alpha)$.

- $VaR_\alpha(L)$ ist translationsinvariant in der Menge der ZV L, dessen Verteilungsfunktion F_L streng monoton und stetig sind. Weil $F_{L+c}(x) = \mathbb{P}(L + c \leq x) = \mathbb{P}(L \leq x - c) = F_L(x - c)$ und $F_(^{-1}L + c)(x) = F_L^{-1}(x) + c$ für $c \in \mathbb{R}$ ist, gilt $VaR_\alpha(L + c) = VaR_\alpha(L) + c$.

- $VaR_\alpha(L)$ ist aber NICHT subadditiv! D.h., $VaR_\alpha(L_1 + L_2) \leq VaR_\alpha(L_1) + VaR_\alpha(L_2)$ gilt i.A. nicht. Auch wenn wir uns nur auf stetige und streng monotone Verteilungsfunktionen einschränken.

Gegenbeispiel: Sei $X \sim \mathcal{N}(0, D_1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0, D_2)$, mit $X \perp\!\!\!\perp Y$. Dann ist $X + Y \sim \mathcal{N}(0, D_1 + D_2)$. Sei F_X bzw. F_Y die Verteilungsfunktion von X bzw. Y. Wähle dann $D_1, D_2 > 0$ s.d.

$$\alpha > \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(\alpha)+F_Y^{-1}(\alpha)} \frac{\exp\left(\frac{-x^2}{2(D_1+D_2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D_1+D_2}} dx = F_{X+Y}(F_X^{-1}(\alpha) + F_Y^{-1}(\alpha)).$$

Es existieren solche D_1 und D_2, s.d. die Ungleichung gilt, weil je kleiner D_1 bzw. D_2 desto kleiner $F_X^{-1}(\alpha)$ bzw. $F_Y^{-1}(\alpha)$ ist, und um so kleiner ist die $F_{X+Y}(x)$. Folglich $F_{X+Y}^{-1}(\alpha) > F_X^{-1}(\alpha) + F_Y^{-1}(\alpha)$ und entsprechend auch $VaR_\alpha(X + Y) > VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y)$ □

Definition 1.4.6. *Zwei Verluste L_1, L_2 auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißen **komoton**, falls es zwei Funktionen f_1, f_2 existieren, und eine ZV Z auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s.d. $L_1 = f_1(Z)$ und $L_2 = f_2(Z)$.*

Lemma 1.4.7. $VaR_\alpha(\mathcal{N}(m, D)) = m + \sqrt{D} VaR_\alpha(\mathcal{N}(0, 1))$.

Beweis. Folgt wegen Translationsinvarianz und Homogonität von VaR_α. □

Lemma 1.4.8. *Sei eine L eine ZV mit einer Verteilungsfunktion F_L, die ivertierbar ist. Sei g eine invertierbare Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *$VaR_\alpha(g(L)) = g(VaR_\alpha(L))$;*
2. *$TVaR_\alpha(g(L)) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 g(VaR_s(L))ds$.*

Beweis.

1. Sei $F_{g(L)}$ die Verteilung von $g(L)$. $F_{g(L)}(x) = \mathbb{P}(g(L) \leq x) = \mathbb{P}(L \leq g^{-1}(L)) = F_L(g^{-1}(x))$, da g invertierbar. Demnach auch g^{-1} invertierbar und $F_{g(L)}^{-1} = g(F_L^{-1})$. Folglich $VaR_\alpha(g(L)) = F_{g(L)}^{-1}(\alpha) = g(F_L^{-1}(\alpha)) = g(VaR_\alpha(L)$.
2. Folgt direkt mit 1. und bisherigen Ergebnissen. □

Beispiel 1.4.9. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $L_1 \sim \mathcal{X}^2 = X^2$, $L_2 = e^{X+a}$ *(etwa mit $Z \sim \mathcal{N}(0, D)$, $D = \sigma^2 t$, $a = \alpha t$, $t \in \mathbb{R}^{++}$ beschreibt e^{Z+a} eine Wertpapieränderung in Abhängigkeit von der Zeit).*

Behauptung 1.4.10. $VaR(L_1) = \big(VaR_{\frac{1}{2}(\alpha+1)}(X)\big)^2$.

Beweis. F_{L_1} ist invertierbar. Sei $y \geq 0$. $F_{L_1}(y) = \mathbb{P}(L_1 \leq y) = 2\mathbb{P}(0 \leq X \leq \sqrt{y}) = 2(F_X(\sqrt{y}) - F_X(0)) = 2F_X(\sqrt{y}) - 1$. Folglich gilt die Identität $F_{L_1}^{-1}(\alpha) = (F_X^{-1}(\frac{1}{2}(\alpha+1)))^2$, weil $F_{L_1}(y) := h(g(l(y)))$ mit $l(y) = \sqrt{y}$, $g(y) = F_X(y)$, $h(y) = 2y - 1$, also $F_{L_1}^{-1}(z) = l^{-1}(g^{-1}(h^{-1}(z)))$, also $l^{-1}(z) = z^2$, $g^{-1}(z) = F_X^{-1}(z)$, $h^{-1}(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$. Folglich $VaR_\alpha(L_1) = F_{L_1}^{-1}(\alpha) = (F_X^{-1}(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}))^2 = (VaR_{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}}(X))^2$ □

Korollar 1.4.11. $TVaR_\alpha(L_1) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 (VaR_{\frac{1}{2}(s+1)}(X))^2 ds$.

Behauptung 1.4.12. $VaR_\alpha(L_2) = \exp(a)\exp(VaR_\alpha(X))$.

Beweis. $F_{L_2}(x) = \mathbb{P}(L_2 \leq x) = \mathbb{P}(\exp(X+a) \leq x) = \mathbb{P}(X + a \leq \ln(x)) = \mathbb{P}(X \leq x - a) = F_X(\ln x - a)$. Und folglich $F_{L_2}^{-1}(\alpha) = \exp(F_X^{-1}(\alpha) + a) = \exp(a)\exp(VaR_\alpha(X))$. Oder alternativ können wir die Homogonität verwenden: $VaR_\alpha(\exp(X+a)) = \exp(a) VaR_\alpha(\exp(X)) = \exp(a)\exp(VaR_\alpha(X)) = \exp(a)F_{L_2}^{-1}(\alpha)$. □

Korollar 1.4.13. $TVaR_\alpha(L_2) = TVaR_\alpha(\exp(X+a)) = \exp(a)TVaR_\alpha(\exp(X)) = \frac{\exp(a)}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_s(\exp(X))ds = \frac{\exp(a)}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \exp(VaR_s(X))ds$

1.5 Übung

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und sei $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ mit zugehöriger Dichte ϕ und Verteilungsfunktion Φ.

Wir wollen beweisen

$$TVaR_\alpha(X) = \mu + \sigma\frac{\phi\big(\Phi^{-1}(\alpha)\big)}{(1-\alpha)}.$$

Beweis.

Bemerkung 1.5.1. *Es gilt* $\mu + \sigma Z \sim X$.

Bemerkung 1.5.2. *Da $TVaR_\alpha(X)$ eine koherente Risikokennzahl, also translationinvariant und homogen, gilt*

$$TVaR_\alpha(X) = \mu + \sigma TVaR_\alpha(Z).$$

Folglich, es genügt zu zeigen

$$(1-\alpha)TVaR_\alpha(Z) = \phi\big(\Phi^{-1}(\alpha)\big).$$

Bemerkung 1.5.3. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
-\phi'(t) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)' &= -\left(-\frac{2t}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\\
&= \frac{t}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\\
&= t\phi(t).
\end{aligned}$$

Wir verwenden noch, dass für eine ZV L, welche streng monoton wachsende und stetige Verteilung hat, $CTVaR_\alpha(L) = TVaR_\alpha(L)$ ist und berechnen

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)TVaR_\alpha(Z) &= \int_\alpha^1 VaR_\alpha(Z)ds = (1-\alpha)\,\mathbb{E}\big[Z > s \mid Z > VaR_\alpha(Z)\big]\\
&= \int_{q_\alpha(Z)}^\infty \mathbb{P}(Z > t)dt\\
&= \int_{q_\alpha(Z)}^\infty t\phi(t)dt\\
&= \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty -\phi'(t)dt99\\
&= \phi\big(\Phi^{-1}(\alpha)\big).
\end{aligned}$$

$\square$

2 Wahrscheinlichkeitsräume

2.1 Wahrscheinlichkeit auf Produkträume

Seien $\Omega_1, ..., \Omega_N$. Die Menge $\times_{n=1}^N \Omega_n = \{(\omega_1, ...\omega_N) \mid \omega_i \in \Omega_N\}$ ist dann **Produktraum**. Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$,...,$(\Omega_N, \mathcal{F}_N)$ Messräume. Sei $C_N = \mathcal{F}_1 \times ... \times \mathcal{F}_N = \{A_1 \times ... \times A_N \mid A_i \in \mathcal{F}_i\}$, Menge aller $N-$dimensionalen Zylinder, $C_N = \times_i \mathcal{F}_i \subseteq 2^{\times_i \Omega_i}$. Die **Produkt-$\sigma$-Algebra** $\bigotimes_{n=1}^N \mathcal{F}_n$ auf $\times_{n=1}^N \Omega_n$ ist die kleinste σ-Algebra welche alle Zylinder enthält, d.h. $\bigotimes_{n=1}^N \mathcal{F}_n = \sigma(C_N) = \sigma(\times_i \mathcal{F}_i)$.

Bemerkung 2.1.1. *Im Allgemein* $C_N \subset \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{F}_n$.

Beispiel 2.1.2. *Sei* $N = 2$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. *Dann* $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}) \neq \sigma(\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. *Denn für die Menge* $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$ *existieren* $A_j \in C_N$, $j \in \mathbb{N}$, *s.d.* $\cup A_j = B_r$, *also* $B_r \in \sigma(\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, *aber* B_r *lässt sich nicht als Produkt darstellen.*

Definition 2.1.3. *Ein* ***Ring*** R *auf einer Menge* Ω *ist eine Menge* $R \subseteq 2^\Omega = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$ *mit filgenden Eigenschaften:*

1) $\emptyset \in R$, $\Omega \in R$;

2) $A, B \in R \implies A \setminus B \in R$;

3) $A, B \in R \implies A \cup B \in R$.

Bemerkung 2.1.4.

1) $\mathcal{F}$ *σ-Algebra* $\implies \mathcal{F}$ *Ring;*

2) $\mathcal{F}$ *σ-Algebra* $\not\Leftarrow \mathcal{F}$ *Ring;*

3) R *Ring,* $A_n \in R$, $n \in \mathbb{R} \not\Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in R$

4) $R(C_N) = \{\dot\bigcup_l A_l \mid A_l \in C_N,\ A_l$ *disjunkt,* $l = 1, ..., n,\ n \in \mathbb{R}\}$ *bildet ein Ring.*

Lemma 2.1.5. *Falls* $\Omega_1 = ... = \Omega_N$ *und* $|\Omega| = n$ *und* $2^{\Omega_1} = \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = ... = \mathcal{F}_N$, *dann ist* $R(C_N) = C_N$. *(ohne Beweis)*

Definition 2.1.6. *Sei R ein Ring auf einer Menge Ω. Eine Funktion $\hat{P} : \mathbb{R} \to [0,1]$, welche folgende Eigenschaften*

1) $\hat{P}(\emptyset) = 0$, $\hat{P}(\Omega) = 1$;

2) $\hat{P}$ *ist additiv;*

3) $\hat{P}$ *ist* σ*-additiv*

erfüllt, heißt ein ***Pre-W-Maß*** *auf* (Ω, R).

Satz 2.1.7 (Caratheodory)**.** *Ein Pre-W-Maß auf (Ω, R) kann eindeutig zu einem W-Maß P auf $(\Omega, \sigma(R))$ erweitert werden. (ohne Beweis)*

Bemerkung 2.1.8. *Es ist $\sigma(C_N) = \sigma(R(C_N))$, da $R(C_N) \subseteq \sigma(C_N)$.*

Korollar 2.1.9. *Jedes Pre-W-Maß $\hat{P} : R(C_N) \to [0,1]$ kann eindeutig auf $\bigotimes_{n=1}^N \mathcal{F}_n$ als W-Maß P erweitert werden, d.h. auf $(\times_{n=1}^N \Omega_n, \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{F}_n)$.*

Bemerkung 2.1.10. *Sei $\mathcal{S}_d = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_d, b_d] \mid a_i < b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt es: $R(\mathcal{S}_d) = \{\dot\bigcup_j A_j \mid A_j \in \mathcal{S}_d,\ j = 1, ..., n\}$ ist ein Ring und $\sigma((\mathcal{S}_d) = \sigma(R(\mathcal{S}_d)) = \sigma(\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times ... \times \mathscr{B}(\mathbb{R})) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes ... \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ ist eine σ-Algebra.*

2.2 Produkt-Wahrscheinlichkeitsmaß auf Produkträume

Satz 2.2.1. *Sei $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1), ..., (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbb{P}_N)$ W-Räume. Dann existiert eindeutig ein W-Maß $\bigotimes_{n=1}^N \mathbb{P}_n$ auf $(\times_{n=1}^N \Omega_n, \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{F}_n)$, s.d. für alle $A = A_1 \times ... \times A_N \in C_N = \mathcal{F}_1 \times ... \times \mathcal{F}_N$ gilt: $\bigotimes_{n=1}^N \mathbb{P}_n(A) = \prod_{n=1}^N \mathbb{P}_n(A_n)$.*

Beweis. [Skizze] Man definiere zuerst $\bigotimes_{l=1}^N \hat{P}_l(\dot\bigcup_l B_l) = \prod_{l=1}^N \hat{P}_l(B_l)$ für alle $\cup B_l \in R(C_N)$, $B_l \in C_N$, B_l paarweise disjunkt. Dann zeigt man, dass $\bigotimes_{l=1}^N \hat{P}_l$ ein Pre-W-Maß auf $(\times_{l=1}^N \Omega_l, R(C_N))$ ist und verwendet folglich den Satz von Caratheodory. □

Definition 2.2.2. *Sei $d \in \mathbb{N}$. Eine d-**Verteilung** ist ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) = (\times_{i=1}^d \mathbb{R}, \bigotimes_{i=1}^d \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.*

Satz 2.2.3. *Für jede 1-dim. Verteilungen $\mu_1, ..., \mu_d$ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ existiert es eine eindeutige d-dim. Verteilung $\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_d = \bigotimes_{i=1}^d \mu_i$, s.d. $\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_d((a_1, b_1] \times ... \times (a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^d \mu_i((a_i, d_i))$. Das ist die **Produktverteilung** von $\mu_1, ..., \mu_d$. (ohne Beweis)*

Lemma 2.2.4. *Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\times_{n=1}^N \Omega_n, \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{F}_n)$ und für $j = 1, ..., N$ sei $\pi_j \mathbb{P} : \mathcal{F}_j \to [0, 1]$, $A_j \mapsto \mathbb{P}(C^j_{A_j})$, wobei $C^j_{A_j} = \Omega \times ... \times \Omega \times A_j \times \Omega \times ... \times \Omega$. Dann ist $\pi_j \mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}_j)$.*

Beweis. $\pi_j \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\pi_j \mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\pi_j \mathbb{P}$ ist additiv. Wende den Satz von Caratheodory an. □

Definition 2.2.5. *$\pi_j \mathbb{P}$ ist die **marginale** oder **projektive** W-keit von $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_j)$.*

Bemerkung 2.2.6. *Es gibt mehrere W-Maße $\mathbb{P}$, welche unterschiedlich sind, die aber gleiche marginale W-keiten haben.*

Beispiel 2.2.7. *Sei $N = 2$. Seien P_1 die Verteilung von (X, Y) auf $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$, wobei $X \sim Y \sim U_{[0,1]}$ unabhängig, und P_2 die Verteilung von $(X, -X)$ auf $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$. Es ist $\pi_1 P_1((-\infty, x)) = \pi_2 P_1((-\infty, x)) = F_{U_{[0,1]}}(x)$ und $\pi_1 P_2((-\infty, x)) = \pi_2 P_2((-\infty, x)) = F_{U_{[0,1]}}(x)$. Weiterhin gilt $P_1((a, b] \times (c, d]) = P_1(X \in (a, b], Y \in (c, d]) = P_1(X \in (a, b])P_1(Y \in (c, d]) = \pi_1 P_1((a, b))\pi_2 P_1((c, d))$, also P_1 ist die Produktwahrscheinlichkeit von zwei uniforme verteilte ZV. Aber $P_2(X \in (a, b], -X \in (c, d]) \neq \pi_1 P_2(X \in (a, b])\pi_2 P_2(-X \in (c, d])$, also $P_1 \neq P_2$.*

Korollar 2.2.8. *Sei μ^d eine d-dim. Verteilung, dann ist $\pi_j \mu^d : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, 1]$, $B \mapsto \mu^d(\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} \times B \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R})$ Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.*

Definition 2.2.9. *$\pi_j \mu^d$ wird auch **Randverteilung von** μ^d genannt. Dessen Verteilungsfunktion wird **Randverteilungsfunktion** genannt.*

Definition 2.2.10. *Die Funktion $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \mu^2(x, y)$ heißt 2-dim. **Verteilungsfunktion** von μ^2.*

Lemma 2.2.11. *Sei μ^2 eine 2-dim. Verteilung mit Randverteilungsfunktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und 2-dim. Verteilungsfunktion H, $H(x,y) = \mu^2((-\infty,x],(-\infty,y])$. Dann gilt für alle $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$: $|H(x_2,y_2) - H(x_1,y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$.*

Beweis. $|H(x_2,y_2)-H(x_1,y_1)| \leq |H(x_2,y_2)-H(x_1,y_2)|+|H(x_1,y_2)-H(x_1,y_1)| \leq \lim\limits_{y_2\to\infty} |H(x_2,y_2) - H(x_1,y_2)| + \lim\limits_{x_1\to\infty} |H(x_1,y_2) - H(x_1,y_1)| = |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$. □

Errinerung: Sei μ^2 eine 2-dim. Verteilung, sei $H : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, $(x,y) \mapsto \mu^2((-\infty,x],(-\infty,y])$. Dann gilt:

1) $H(x_y)$ ist in jedem Argument monoton wachsend;

2) $H(x_y)$ ist in jedem Argument rechtsstetig;

3) $F : x \mapsto \lim\limits_{y\to\infty} H(x,y)$ ist eine Verteilungsfunktion (und zwar Randverteilungsfunktion);

4) $G : y \mapsto \lim\limits_{x\to\infty} H(x,y)$ ist eine Verteilungsfunktion (und zwar Randverteilungsfunktion);

5) Falls $a < b$, $c < d$ so ist $H(b,d) - H(b,c) - H(a,d) + H(a,c) \geq 0$.

Beweis.

1) $H_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto H(x,y) = \mu^2((-\infty,x],(-\infty,y])$ ist monoton wachsend, weil μ^2 ein W-Maß ist und für $y < y'$ $(-\infty,x],(-\infty,y] \subset (-\infty,x],(-\infty,y']$ gilt. Analog H_y;

2) $H_x(y) = \mu^2((-\infty,x],(-\infty,y]) = \mu^2(\cap_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,x],(-\infty,y+\frac{1}{n}])$, folglich, wegen Monotonie von Maße, $H(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^2((-\infty,x],(-\infty,y+\frac{1}{n}]) = \lim\limits_{n\to\infty} H_x(y+\frac{1}{n})$, da H_x monoton ist;

3) ✓;

4) ✓;

5) Folgt wegen $(a,b] \times (c,d)] = \{(-\infty,b] \times (-\infty,d] \setminus (-\infty,b] \times (-\infty,c]\} \setminus \{(-\infty,a] \times (-\infty,d] \setminus (-\infty,a] \times (-\infty,c]\}$.

□

Satz 2.2.12. *Sei $H : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die Eigenschaften 1)-5) von oben erfüllt, dann existiert eine 2-dim. Verteilung μ^2, s.d. $\mu^2((-\infty,x],(-\infty,y]) = H(x,y)$, d.h. H ist die Verteilungsfunktion von μ^2.*

Beweis. Via Satz von Carathedory. □

Definition 2.2.13. *Im Allgemeinen nennt man eine Funktion $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die Eigenschaften 1)-5) von oben erfüllt, eine 2-**dim. Verteilungsfunktion**.*

Bemerkung 2.2.14. *Es gibt $1:1$ Zuordnung: 2-dim. Verteilungen $\leftrightarrow$ 2-dim. Verteilungsfunktionen.*

Lemma 2.2.15. *Sei μ^2 eine 2-dim. Verteilung, dann existiert immer (unendlich viele) ZV (X,Y) mit Wertraum $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$, s.d. (X,Y) die Verteilung μ^2 hat, d.h. es existiert mindestens ein $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ W-Raum mit einer ZV (X,Y), s.d. $\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mu^2((-\infty,x],(-\infty,y])$.*

Beweis. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2), \mu^2)$, $(X,Y) = Id^2$. □

3 Copulae

Definition 3.0.16. *Sei $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty]$ und seien $S_1,...,S_n$ nichtleere Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$. Sei H eine n-**dim. reelle Funktion** mit $dom(H) = S_1 \times ... \times S_n$. Es gelte $a \leq b$ für $a,b \in \mathbb{R}^n$ falls $a_k \leq b_k$ für alle $k = 1,...,n$ ist. Für $a \leq b$ sei ein n-**Quadrat** B definiert als das kartesische Produkt über n abgeschlossene Intervalle, deren 2^n Eckpunkte in $dom(H)$ liegen, d.h. $B = [a,b] = [a_1,b_1] \times ... \times [a_n,b_n]$. Mit $I^n = I \times ... \times I$, wobei $I = [0,1]$, bezeichnen wir das **Einheitsquadrat** in $\mathbb{R}^n$.*

Definition 3.0.17. *Das H-**Volumen** von einem Quadrat B ist definiert als* $V_H(B) = \sum sgn(c)H(c)$*, wobei die Summe über alle Ecken* $c = (c_1, ..., c_n)$ *läuft, mit* $c_i \in \{a_i, b_i\}$ *für alle* $i = 1, ..., n$*. Die Funktion* $sgn(c)$ *ist definiert durch*

$$sgn(c) = \begin{cases} 1 & falls\ c_k = a_k\ fuer\ eine\ gerade\ Anzahl\ von\ k's, \\ -1 & sonst. \end{cases}$$

Lemma 3.0.18. *Äquivalent zur obigen Darstellung von H-Volumen des n-Quadrates B ist die Darstellung als Differenz n-ter Ordnung von H auf B, d.h.* $V_H(B) = \triangle_a^b H(t) = \triangle_{a_1}^{b_1} ... \triangle_{a_n}^{b_n} H(t)$*, wobei die Differenz der k-ter Ordnung definiert als* $\triangle_{a_k}^{b_k} H(t_1, ..., t_{k-1}, t, t_{k+1}, ..., t_n) = H(t_1, ..., t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, ..., t_n) - H(t_1, ..., t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, ...,$

Beweis. Falls $n = 2$ gilt: $V_H(B) = \triangle_{a_1}^{b_1} \triangle_{a_2}^{b_2} H(t_1, t_2) = H(b_1, b_2) - H(b_1, a_2) - H(a_1, b_2) + H(a_1, a_2) = \sum sgn(c)H(c)$. Dann läuft die Behauptung durch Induktion. □

Definition 3.0.19. *Eine n-dim. reelle Funktion H heißt n-**steigend**, falls* $V_H(B) \geq 0$ *für alle n-Quadrate B, dessen Ecken in* $dom(H)$ *liegen.*

Bemerkung 3.0.20. *Die folgende Beispiele zeigen: falls H eine n-stegende Funktion ist, dann folgt daraus NICHT, dass H monoton steigend in jeder Variable ist. Der Umkehrschluss ist auch nicht möglich.*

Beispiel 3.0.21. *Sei H eine Funktion auf dem Einheitsquadrat* I^2 *definiert durch* $H(a, b) = \{a, b\}$*, so ist H monoton steigend in jeder Variable. Jedoch ist H nicht 2-steigend, da* $V_H(I^2) = H(1, 1) - H(0, 1) - H(1, 0) + H(0, 0) = -1$*.*

Beispiel 3.0.22. *Sei H eine Funktion definiert auf* I^2 *durch* $H(a, b) = (2a - 1)(2b - 1)$*. Dann ist H 2-steigend, denn sei* $B = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$*. Dann gilt* $V_H(B) = H(a_2, b_2) - H(a_2, b_1) - H(a_1, b_2) + H(a_1, b_1) = 4(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geq 0$*. Weiter ist H nicht monoton steigend in jeder Variable, denn für* $a < \frac{1}{2}$ *ist H monoton fallend falls* $b \in (\frac{1}{2}, 1)$*.*

Definition 3.0.23. *Sei a_k jeweils das kleinste Element der nichtleeren Teilmengen $S_k \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ mit $k = 1, ..., n$. Man nennt eine Funktion $H : S_1 \times ... \times S_n \to \bar{\mathbb{R}}$* ***geerdet****, falls $H(x_1, ..., x_n) = 0$ gilt, wenn für mindestens ein x_i mit $i = 1, ..., n$ gilt $x_i = a_i$.*

Lemma 3.0.24. *Seien $S_1, ..., S_n$ nichtleere Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$ und sei H eine n-steigende Funktion mit $dom(H) = S_1 \times ... \times S_n$, dann ist die Funktion $t \mapsto H(x_1, ..., x_{l-1}, s, x_{l+1}, ..., x_{k-1}, t, x_{k+1}, ..., x_n) - H(x_1, ..., x_{l-1}, r, x_{l+1}, ..., x_{k-1}, t, x_{k+1}, ..., x_n)$ monoton steigend (in jeder Variable), $k \neq l$, und $k, l \in \{1, ..., n\}$. Hierbei ist $x_i \in S_i$ für $i = 1, ..., n$ und $r, s \in S_l$ mit $r \leq s$.*

Beweis. Es gilt für $t_1 \leq t_2$: $H(x_1, ..., x_{l-1}, s, x_{l+1}, ..., x_{k-1}, t_2, x_{k+1}, ..., x_n) - H(x_1, ..., x_{l-1}, r, x_{l+1}, ..., x_{k-1}, t_2, x_{k+1}, ..., x_n) - H(x_1, ..., x_{l-1}, s, x_{l+1}, ..., x_{k-1}, t_1, x_{k+1}, ..., x_n) + H(x_1, ..., x_{l-1}, r, x_{l+1}, ..., x_{k-1}, t_1, x_{k+1}, ..., x_n) = \triangle_r^s \triangle_{t_1}^{t_2} \geq 0$, da H n-steigend. Also gilt die Behauptung. □

Lemma 3.0.25. *Seien $S_1, ..., S_n$ nichtleere abgeschlossene Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$, wobei jede S_i seines kleinsten Element a_i enthält. Sei H eine geerdete und n-steigende Funktion mit $dom(H) = S_1 \times ... \times S_n$. Dann ist H monoton steigend in jeder Variable.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für $(x_1, ..., x_{k-1}, r, x_{k+1}, ..., x_n), (x_1, ..., x_{k-1}, s, x_{k+1}, ..., x_n) \in dom(H)$ und $r \leq s$ die folgende Ungleichung gilt: $H(x_1, ..., x_{k-1}, r, x_{k+1}, ..., x_n) \leq H(x_1, ..., x_{k-1}, s, x_{k+1}, ..., x_n)$. Da a_k jeweils das kleinste Element von S_k ist, haben wir $B = [(a_1, ..., a_{k-1}, r, a_{k+1}, ..., a_n), (x_1, ..., x_{k-1}, s, x_{k+1}, ..., x_n)]$. Nun ist H n-steigend, $V_H(B) \geq 0$, und es ist geerdet, weshalb $0 \leq V_H(B) = H(x_1, ..., x_{k-1}, s, x_{k+1}, ..., x_n) - H(x_1, ..., x_{k-1}, r, x_{k+1}, ..., x_n)$, da alle andere Summanden mindestens eine a_i enthalten und somit wegfallen, d.h. die gewünschte Ungleichung gilt und somit die Behauptung. □

Definition 3.0.26. *Eine n-**dim. Verteilungsfunktion** H ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\bar{\mathbb{R}}^n$, für die gilt, dass H geerdet und n-steigend und*

$H(\infty, ..., \infty) = 1$ *gilt.*

Definition 3.0.27. *Sei b_k jeweils das größte Element der nichtleeren Teilmengen $S_k \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ mit $k = 1, ..., n$ und H eine Funktion auf $S_1 \times ... \times S_n$. Dann nennen wir H_k die* ***eindimensionale Randverteilung*** *für $k \in \{1, ..., n\}$, falls gilt:*

1) $dom(H_k) = S_k$;

2) $H_k(x) = H(b_1, ..., b_{k-1}, x, b_{k+1}, ..., b_n)$ für alle $x \in S_k$.

Wir erhalten mehrdimensionale Randverteilungen, indem wir weniger Variablen fixieren.

Lemma 3.0.28. *Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F. Dann gilt für alle x: $\mathbb{P}(F(x) \leq F(x)) = F(x)$.*

Beweis. Es ist $\{F(X) \leq F(x)\} = (\{F(X) \leq F(x)\} \cap \{X \leq x\}) \cup (\{F(X) \leq F(x)\} \cap \{X > x\})$. Nun gilt $\{X \leq x\} \subseteq \{F(X) \leq F(x)\}$ und $\{F(X) \leq F(x)\} \cap \{X > x\} \neq \emptyset$. Also $\{F(X) \leq F(x)\} = \{X \leq x\} \cup (\{F(X) = F(x)\} \cap \{X > x\})$. Wenn wir auf beiden Seiten der letzten Gleichung die W-keit berechnen, erhalten wir $\mathbb{P}(F(X) \leq F(x)) = \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}((F(X) = F(x)) \cap (X > x)) = \mathbb{P}(X \leq x)$. □

Satz 3.0.29. *Sei X eine reellwertige ZV mit Verteilungsfunktion F. Es gelten folgende Aussagen:*

1) Falls F stetig ist, so ist die ZV $Y = F(X)$ uniform, $U_{[0,1]}$, verteilt.

2) Falls $F^{-1} : [0,1] \to (-\infty, \infty)$ definiert durch $F^{-1}(y) = \inf\{x \mid F(x) \geq y\}$ mit $0 < y < 1$ und Y eine ZV mit $U_{[0,1]}$-Verteilung ist, dann hat $X = F^{-1}(Y)$ Verteilungsfunktion F.

Beweis.

1) Sei $u \in (0,1)$. Da F stetig ist, existiert es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = u$. Aus 3.0.28 folgt $\mathbb{P}(Y \leq u) = \mathbb{P}(F(X) \leq F(x)) = u$, weshalb Y uniform verteilt ist.

2) Für ein $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < F(x) < 1$ und $u \in [0,1]$ gilt $F(x) \geq u$ genau dann, falls $x \geq F^{-1}(u)$ gilt. Angenommen, es gilt $x \geq F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \geq u\}$. Dann gilt, da F als Verteilungsfunktion monoton steigend und rechtsstetig ist, dass $\{x \mid F(x) \geq u\}$ ein Intervall ist, dass den linken Endpunkt beinhaltet. Also $F(x) \geq u$ für alle x. Umgekehrt, falls $F(x) \geq u$ gilt, so folgt $x \geq \inf\{x \mid F(x) \geq u\} = F^{-1}(u)$. Also $\mathbb{P}(F^{-1}(Y) \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq F(x)) = F(x)$. □

Satz 3.0.30. *Seien $S_1, ..., S_n$ nichtleere Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$, welche jeweils ihr kleinstes Element a_k und größtes Element b_k beinhalten. Sei H eine n-steigende und geerdete Funktion mit eindimensionalen Randverteilungen $H_1, ..., H_n$. Dann gilt für $(x_1, ..., x_{k-1}, x, x_{k+1}, ..., x_n) \in dom(H)$, dass $0 \leq H(x_1, ..., x_{k-1}, x, x_{k+1}, ..., x_n) \leq H_k(x)$.*

Beweis. Definition der Randverteilung und 3.0.25. □

Satz 3.0.31. *Seien $S_1, ..., S_n$ nichtleere Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$, welche jeweils ihr kleinstes Element a_k und größtes Element b_k beinhalten. Sei H eine n-steigende und geerdete Funktion mit $dom(H) = S_1 \times ... \times S_n$ und eindimensionalen Randverteilungen $H_1, ..., H_n$. Dann gilt für $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in S_1 \times ... \times S_n$, dass $|H(x_1, ..., x_n) - H(y_1, ..., y_n)| \leq \sum_{k=1}^{n} |H_x(x_k) - H_k(y_k)|$.*

Beweis. Mit Dreiecksungleichung folgt: $|H(x_1, ..., x_n) - H(y_1, ..., y_n)| \leq |H(y_1, ..., y_n) - H(x_1, y_2, ..., y_n)| + |H(x_1, y_2, ..., y_n) - H(x_1, x_2, y_3, ..., y_n)| + ... + |H(x_1, ..., x_{n-1}, y_n) - H(x_1, ..., x_n)|$. Sei nun oBdA $x_k \leq y_k$ ($x_k \geq y_k$ folgt analog). Da H geerdet und n-steigend ist, gilt mit 3.0.25, dass $0 \leq |H(y_1, ..., y_k, x_{k+1}, ..., x_n) - H(y_1, ..., y_{k-1}, x_k, ..., x_n)|$ für alle $k = 1, ..., n$. Nun folgt aus $n-1$ Anwendung von 3.0.24, dass die Randverteilungen von H existieren und es gilt $0 \leq |H(y_1, ..., y_k, x_{k+1}, ..., x_n) - H(y_1, ..., y_{k-1}, x_k, ..., x_n)| \leq |H_k(y_k) - H_k(x_k)|$ für jedes $k = 1, ..., n$. Dies führt man nun so weiter für alle $k = 1, ..., n$ und ersetzt in erster Ungleichung die Terme. □

Definition 3.0.32. *Eine n-**Subcopula** ist eine Funktion C' mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $dom(c') = S_1 \times ... \times S_n$, wobei $S_1, ..., S_n$ Teilmengen vom Einheitsintervall I sind, die die beiden Punkte 0 und 1 enthalten;

(b) c' ist geerdet;

(c) C' ist n-steigend;

(d) Die Randverteilung C_k mit $k = 1, ..., n$ uniform auf I verteilt.

Eigenschaft (d) heißt, dass z.B. für eine 2-Subcopula gilt $C'(u, 1) = u$ und $C'(1, v) = v$ für alle $u \in S_1$ und $v \in S_2$.

Definition 3.0.33. *Eine n-**Copula** C ist eine n-Subcopula mit $dom(C) = I^n$.*

Bemerkung 3.0.34.

1) Ist C eine n-Copula, dann ist jede k-dim. Randverteilung eine k-Copula.

2) Copulas sind Verteilungsfunktionen von I^n nach I, d.h. sie induzieren W-maße auf I^n durch $V_C([0, u_1] \times ... \times [0, u_n]) = C(u_1, ..., u_n)$.

Satz 3.0.35. *Jede n-Copula C ist gleichmäßig stetig auf ihrem Definitionsbereich, d.h. für alle $u, v \in I^n$ erfüllt C die Lipschitz-Eigenschaft: $|C(v) - C(u)| \leq \sum_{k=1}^{n} |v_k - u_k|$.*

Beweis. Es gilt $|C(u) - C(v)| \leq \sum_{k=1}^{n} |C_k(v_k) - C_k(u_k)| = \sum_{k=1}^{n} |v_k - u_k|$ wegen 3.0.31 und Definition von n-Subcopula. $\square$

Satz 3.0.36. *Sei $C(u_1, ..., u_n)$ eine Copula. Für beliebige $u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n \in I$ existieren die partielle Ableitungen $\frac{\partial C}{\partial u_i}$ für fast alle u_i, $i = 1, ..., n$, und es gilt $0 \leq \frac{\partial C(u_1, ..., u_n)}{\partial u_i} \leq 1$.*

Beweis. Monotone Funktionen sind fast überall differenzierbar, weshalb die partiellen Ableitungen $\frac{\partial C}{\partial u_i}$ existieren. Es ist $\frac{\partial C(u_1, ..., u_n)}{\partial u_i} \geq 0$, da C streng monoton steigend in jeder Variable ist. Setzen wir in 3.0.35 die $u_1 = v_1, ..., u_{i-1} = v_{i-1}, u_{i+1} = v_{i+1}, ..., u_n = v_n$, $i = 1, ..., n$, so gilt auch $\frac{\partial C(u_1, ..., u_n)}{\partial u_i} \leq 1$. $\square$

3.1 Übung

Beispiel 3.1.1. *Sei $X \sim U_{[0,1]}$ eine auf $[0,1] \subset \mathbb{R}$ uniform verteilte ZV. Dann gilt es für alle $z = (z_1, z_2) \in [0,1]^2$:*

(i) Ist $Z_0 := (X, X)$, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}(Z_0 \leq z) := \mathbb{P}(X \leq z_1 \wedge X \leq z_2) = \mathbb{P}\big(X \leq min\{z_1, z_2\}\big) = \min\{z_1, z_2\}$ eine Copula.

(ii) Ist $Z_1 := (X, 1 - X)$, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}(Z_1 \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z_1 \wedge 1 - X \leq z_2) = \mathbb{P}(1 - z_2 \leq X \leq z_1) = \max\{0, z_1 + z_2 - 1\}$ eine Copula.

(iii) Ist $Y \sim X, Y \perp\!\!\!\perp X$ und $Z_2 := (X, Y)$, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}(Z_2 \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z_1)\mathbb{P}(Y \leq z_2) = z_1 z_2$ eine Copula.

3.2 Graph einer 2-dim. Copula

Definition 3.2.1. *Sei C eine 2-dim. Copula und $a \in I$ beliebig. Der horizontale Abschnitt von C in a ist eine Funktion von I nach I definiert durch $t \mapsto C(t, a)$. Der vertikale Abschnitt von C in a ist die Funktion von I nach I definiert durch $t \mapsto C(a, t)$. Der diagonale Abschnitt von C ist die Funktion $\delta_C : I \to I$ definiert durch $\delta_C(t) = C(t, t)$.*

Korollar 3.2.2. *Der horizontale, vertikale und diagonale Abschnitt einer 2-dim. Copula sind monoton steigend und gleichmäßig stetig.*

Beweis. Folgt wegen 3.0.25 und 3.0.35. □

3.3 Systematisches Risiko

Sein $L_1, ..., L_n$ ZV die Verluste beschreiben, und die eine gemeinsame Verteilung μ haben (und i.A. NICHT stochastisch unabhängig sind). Wir suchen systematische Risikoeffekte, z. B. $\mathbb{P}(L_1 > u_1, ..., L_{n-1} > u_{n-1} \mid L_n > u)$, wobei u und $u_1, ..., u_{n-1}$ Extremwerte sind. Oder fragen wir uns sogar: $\mathbb{P}(L_1 > VaR_\alpha(L_1), ..., L_{n-1} > VaR_\alpha(L_{n-1}) \mid L_n > VaR_\alpha(L_n))$ - ? und um die Fragen zu beantworten benutzen wir Copulas, denn diese geben einen Zusammenhang (siehe Satz von Sklar) zwischen gemeinsamer Verteilungsfunktion $H(x_1, ..., x_n)$ von $L_1, ..., L_n$ und den Randverteilungen.

Definition 3.3.1. *Eine n-dim. Verteilung μ ist ein W-maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$.*

Definition 3.3.2. *Eine n-dim. Verteilung μ hat* ***Träger*** *$[A, B] = [A_1, B_1] \times ... \times [A_n, B_n]$ mit $A_1, B_1, ..., A_n, B_n \in \bar{\mathbb{R}}$ falls:*

1) $\mu([A, B]) = 1$;

2) $\mu([A, B]^c) = 0$,

3) $\lambda([A, B]) \leq \lambda([A', B'])$ für alle $[A', B'] = [A'_1, B'_n] \times ... \times [A'_n, B'_n]$ für die 1)+2) auch gilt.

Definition 3.3.3. *Sei a_k jeweils das kleinste Element der nichtleeren Teilmengen $S_k \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ mit $k = 1, ..., n$. Man nennt eine Funktion $H : S_1 \times ... \times S_n \to \bar{\mathbb{R}}$* ***geerdet****, falls $H(x_1, ..., x_n) = 0$ gilt, wenn für mindestens ein x_i mit $i = 1, ..., n$ gilt $x_i = a_i$.*

Definition 3.3.4. *Eine Funktion $H : \bar{\mathbb{R}} \to [0, 1]$ hat* ***Träger*** *$[A, B] = [A_1, B_1] \times ... \times [A_n, B_n]$ mit $A_1, B_1, ..., A_n, B_n \in \bar{\mathbb{R}}$ falls:*

1) $V_H([A, B]) = \triangle_{A_1}^{B_1} ... \triangle_{A_n}^{B_n} H = 1$;

2) $H(A_1, x_2, ..., x_n) = H(x_1, A_2, ..., x_n) = ... = H(x_1, x_2, ..., A_n) = 0$ (d.h. H ist auf $[A, B]$ geerdet).

Definition 3.3.5. *Eine n-**dim. Verteilungsfunktion** H ist eine Funktion $H : \bar{\mathbb{R}} \to [0, 1]$ für die gilt, dass*

1) H geerdet ist, d.h. $H(-\infty, x_2, ..., x_n) = ... = H(x_1, ..., x_{n-1}, -\infty) = 0$;

2) H ist n-monoton steigend;

3) $H(\infty, ..., \infty) = 1$.

Satz 3.3.6. *Eine n-dim. Verteilungsfunktion H induziert eindeutig eine n-dim. Verteilung μ mit der Eigenschaft, dass $\mu((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]) = V_H((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]) = \triangle_{a_1}^{b_1} ... \triangle_{a_n}^{b_n} H$, für alle $a_1, b_1, ..., a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Umgekehrt, gehört zu jeder n-dim. Verteilung μ eine n-dim. Verteilungsfunktion H, für die die Gleichung gilt.*

Beweis. Siehe W-Theorie. □

Lemma 3.3.7. *Sei H eine n-dim. Verteilungsfunktion mit Verteilung μ, dann sind $H_1(x) = \lim\limits_{(y_2,...,y_n)\to\infty} H(x, y_2, ..., y_n)$,...,$H_n(x) = \lim\limits_{(y_1,...,y_{n-1})\to\infty} H(y_1, y_2, ..., x)$ sind 1-dim. Verteilungsfunktionen.*

Beweis. Siehe W-Theorie. □

Definition 3.3.8. *$H_1(x), ..., H_n(x)$ in Lemma werden* ***Randverteilungsfunktionen*** *von H genannt, dessen Verteilungen $\mu_1, ..., \mu_n$ auf $(\mathbb{R}, (B)(\mathbb{R}))$ sind die* ***Randverteilungen*** *von μ.*

Bemerkung 3.3.9. *Zu einer n-dim. Verteilung μ gibt es (∞-) viele n-dim. ZV $(L_1, ..., L_n)$ mit Verteilung μ. Die 1-dim. ZV $L_1 = \pi_1(L_1, ..., L_n)$,...,$L_n = \pi_n(L_1, ..., L_n)$ mit $\pi_i : \bar{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$, die* ***Projektionen****, haben als Verteilung die Randverteilungen $\mu_1, ..., \mu_n$.*

Beweis. Siehe W-Theorie. □

Definition 3.3.10. *Eine n-**dim. Copula** ist eine n-dim. Funktion $C : \bar{\mathbb{R}}^n \to [0, 1]$ mit Träger $[0, 1]^n$, s.d.:*

1) C n-monoton steigend;

2) $C(u, 1, ..., 1) = C(1, u, 1, ..., 1) = ... = C(1, ..., 1, u) = u$ für alle $u \in [0, 1]$.

Bemerkung 3.3.11. *Da C n-monoton steigend ist und Träger auf $[0,1]^n$ hat, folgt dass C geerdet ist.*

Beweis. Da C Träger auf $[0,1]^n$ hat, folgt dass $C(0, x_2, ..., x_n) = C(x_1, 0, x_3, ..., x_n) = ... = C(x_1, ..., x_{n-1}, 0) = 0$. Da außerdem C n-monoton steigend ist, folgt $C(-\infty, x_2, ..., x_n) = C(x_1, -\infty, x_3, ..., x_n) = ... = C(x_1, ..., x_{n-1}, -\infty) = 0$. D.h. C ist geerdet. □

Satz 3.3.12. *Eine Funktion $C : \bar{\mathbb{R}}^n \to [0,1]$ ist eine Copula, falls und nur falls C eine n-dim. Verteilungsfunktion, dessen Randverteilungen die uniforme Verteilungen auf $[0,1]$ sind.*

Beweis. Sei H eine n-dim. Verteilungsfunktionen mit uniformen Randverteilungen $\mu_1, ..., \mu_n$. Dann ist H n-monoton steigend und auch geerdet. Wir zeigen, dass für H die zweite Eigenschaft der Definition gilt. Sei $(L_1, ..., L_n)$ eine ZV mit H als Verteilungsfunktion, dann gilt $H(u, 1, ..., 1) = \mathbb{P}(L_1 \leq u, L_2 \leq 1, ..., L_n \leq 1) = \mu_1((-\infty, u]) = u$ und ... und $H(1, ..., 1, u) = \mu_n((-\infty, u]) = u$ für alle $u \in [0,1]$. Wir zeigen noch, dass H Träger auf $[0,1]^n$ hat. Es ist $H(1, ..., 1) = \mathbb{P}(L_1 \leq 1, ..., L_n \leq 1) = 1$ und $H(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) = \mathbb{P}(L_1 \leq x_1, ..., L_{i-1} \leq x_{i-1}, L_i \leq 0, L_{i+1} \leq x_{i+1}, ..., L_n \leq x_n) = 0$. Umgekehrt sei C eine Copula, dann hat C alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion, dessen Randverteilungen uniform verteilt sind. Mit dem Träger $[0,1] \times ... \times [0,1]$. □

Definition 3.3.13. *Eine n-dim. Funktion $C' : S_1 \times ... \times S_n \to [0,1]$, $S_i \subseteq [0,1]$ für die gilt:*

1. *C' n-monoton steigend;*
2. *$C'(u_1, 1, ..., 1) = u_1$,...,$C'(u_1, 1, ..., 1) = u_1$ für alle $u_i \in S_i$ heißt* ***Subcopula****.*

D.h. eine Subcopula hat alle Eigenschaften einer Copula, aber der Träger liegt auf einer Menge $S_1 \times ... \times S_n \subseteq [0,1] \times ... \times [0,1]$

Bemerkung 3.3.14. *Eine Copula ist auch eine Subcopula.*

Lemma 3.3.15 (Lemma von Sklar)**.** *Sei H eine n-dim. Verteilungsfunktion mit marginalen Verteilungsfunktionen $F_1, ..., F_n$. Dann existiert eindeutig eine Subcopula C' mit Definitionsbereich $Dom(C') = Ran(F_1) \times ... \times Ran(F_n)$, so dass $C'(F_1(z_1), ..., F_n(z_n)) = H(z_1, ..., z_n)$.*

Beweis. Sei $C' : Ran(F_1) \times ... \times Ran(F_n) \to [0, 1]$ mit $(F_1(z_1), ..., F_n(z_n)) \mapsto H(z_1, ..., z_n)$. Da H geerdet und n-monoton steigend ist, folgt $|H(y_1, ..., y_n) - H(x_1, ..., x_n)| \leq |F_1(y_1) - F_1(x_1)| + ... + |F_1(y_n) - F_1(x_n)|$ s.d. C' eine Funktion ist, die auch eindeutig definiert ist. Wir beweisen, dass C' eine Subcopula ist: C' ist geerdet, weil $0 \in Ran(F_i)$ und der kleinste Wert in $Ran(F_i)$, für $i = 1, ..., n$. Also $C'(0, x_2, .., x_n) = H(-\infty, x_2, ..., x_n) = 0$ und ... und $C'(x_1, .., x_{n-1}, 0) = H(x_1, ..., x_{n-1}, -\infty) = 0$. Sei $u \in Ran(F_1)$ mit $F_1(z_1) = u$, dann $C'(u, 1, ..., 1) = C'(F_1(z_1), 1, ..., 1) = H(z_1, 1, ..., 1) = F_1(z_1) = u$. ... Sei $u \in Ran(F_n)$ mit $F_n(z_n) = u$, dann $C'(1, ..., 1, u) = C'(1, ..., 1, F_1(z_n)) = H(1, ..., 1, z_1) = F_n(z_n) = u$. Außerdem folgt daraus insbesondere $C'(1, ..., 1) = 1$. Demnach ist C' geerdet. □

Definition 3.3.16. *Sei F eine Verteilungsfunktion $F : \bar{\mathbb{R}} \to [0, 1]$. Eine* ***quasi-inverse Funktion*** *von F ist eine Funktion F^{-1} mit Definitionsbereich $[0, 1]$, s.d.:*

1) $\forall t \in Ran(F) \exists x \in \bar{\mathbb{R}}(F(x) = t)$, d.h. $\forall t \in Ran(F)$ gilt $F(F^{-1}(t)) = t$;

2) Falls $t \in Ran(F)$, so gilt $F^{-1} = inf\{x|F(x) \geq t\} = min\{x|F(X) \geq t\} = sup\{x \in \bar{\mathbb{R}}|F(X) \leq t\}$.

Bemerkung 3.3.17. *Falls die Verteilungsfunktion $F : \bar{\mathbb{R}} \to [0, 1]$ invertierbar ist, gilt außer 1) und 2) noch $F^{-1}(F(x)) = x$ für alle $x \in \bar{\mathbb{R}}$.*

Korollar 3.3.18. *Sei H n-dim. Verteilungsfunktion mit marginalen Verteilungsfunktionen $F_1, ..., F_n$ und $C' : Ran(F_1) \times ... \times Ran(F_n) \to [0, 1]$ die einzige Subcopula, für die gilt, dass $C'(F_1(z_1), ..., F_n(z_n)) = H(z_1, ..., z_n)$ für al-*

le $(z_1, ..., z_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$. *Dann gilt* $C'(z_1, ..., z_n) = H(F_1^{-1}(z_1), ..., F_n^{-1}(z_n))$, *wobei* $F_1^{-1}, ..., F_n^{-1}$ *die quasi-inverse Funktionen von* $F_1, ..., F_n$ *sind.*

Beweis. Folgt direkt aus Voraussetzung und Definition von quasi-inverse Funktionen. □

Lemma 3.3.19. *Jede Subcopula* $C' : S_1 \times ... \times S_n \to [0,1]$ *kann, wenn auch nicht eindeutig, zu einer Copula* $C : \bar{\mathbb{R}}^n \to [0,1]$ *erweitert werden, d.h. falls* $C' : S_1 \times ... \times S_n \to [0,1]$ *eine Subcopula ist, existiert (mindestens) eine Copula* $C : \bar{\mathbb{R}}^n \to [0,1]$, *s.d.* $C(u_1, ..., u_n) = C'(u_1, ..., u_n)$ *für alle* $(u_1, ..., u_n) \in S_1 \times ... \times S_n$.

Beweis. Siehe Nelsen. □

Satz 3.3.20 (Satz von Sklar)**.** *Sei* H *eine* n*-dim. Verteilungsfunktion mit marginalen Verteilungsfunktionen* $F_1, ..., F_n$. *Dann existiert eine* n*-dim. Copula* C, *s.d.* $H(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$ *für alle* $x_1, ..., x_n \in \bar{\mathbb{R}}^n$. *Falls* $F_1, ..., F_n$ *invertierbar sind (wenn* F_i *streng steigend und stetig sind) dann ist die Copula* C *eindeutig gegeben. Ansonsten ist* C *eindeutig nur auf* $Ran(F_1) \times ... \times Ran(F_n)$ *definiert. Umgekehrt: Sei* C *eine Copula, und* $F_1, ..., F_n$ *1-dim. Verteilungsfunktionen, dann ist* $H(x_1, ..., x_n) := C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$ *eine* n*-dim. Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen* $F_1, ..., F_n$.

Beweis.

" $\Leftarrow$ " Sei C eine Copula und $F_1, ..., F_n$ 1-dim. Verteilungsfunktionen. Wir müssen zeigen, dass $H(x_1, ..., x_n) = C((F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$ eine n-dim. Verteilungsfunktion.

- H ist monoton steigend, weil C n-monoton steigend und $F_1, ..., F_n$ monoton steigend;
- H ist geerdet, weil $F_1(-\infty) = ... = F_n(-\infty) = 0$ und C ist auf $[0,1]^n$ geerdet;

- Da $F_1(\infty) = ... = F_1(\infty) = 1$ gilt $H(\infty, ..., \infty) = 1$.

H hat als Randverteilungsfunktionen $F_1, ..., F_n$, weil $H(x_1, \infty, ..., \infty) = C(F_1(x_1), \infty, ..., \infty) = F_1(x_1)$ und ... und $H(\infty, ..., \infty, x_n) = C(\infty, ..., \infty, F_n(x_n)) = F_n(x_n)$.

" $\Rightarrow$ " Sei H eine n-dim. Verteilungsfunktion mit Randverteilungen $F_1, ..., F_n$. Sei, gemäß der Lemma von Sklar, $C' : Ran(F_1) \times ... \times Ran(F_n) \to [0, 1]$ die eindeutige Subcopula für die gilt, dass $C'((F_1(z_1), ..., F_n(z_n)) = H(z_1, ..., z_n)$ für alle $(z_1, ..., z_n) \in Ran(F_1) \times ... \times Ran(F_n)$. Weiterhin kann C' zu einer Copula $C : \bar{\mathbb{R}}^n \to [0, 1]$ erweitert werden, s.d. $C(F_1(z_1), ..., F_n(z_n)) = H(z_1, ..., z_n)$ für alle $(z_1, ..., z_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$. Wir wollen jetzt zeigen, dass C eindeutig festgelegt ist auf $Dom(C) = \bar{\mathbb{R}}^n$ falls $F_1, ..., F_n$ invertierbar sind. Wegen der Invertierbarkeit von $F_1, ..., F_n$ gilt: $\forall (u_1, ..., u_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n \exists! (z_1, ..., z_n)$ mit $F_i(z_i) = u_i$, $i = 1, ..., n$ und $C(u_1, ..., u_n) = C(F_1(z_1), ..., F_n(z_n)) = H(z_1, ..., z_n) = H(F_1^{-1}(u_1), ..., F_n{-1}(u_n))$ für alle $(u_1, ..., u_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$. Folglich C ist auf $Dom(C) = \bar{\mathbb{R}}^n$ eindeutig festgelegt.

$\square$

Zusammenfassung: Falls $(X_1, ..., X_n)$ eine n-dim. ZV mit Verteilungsfunktion $H : \bar{\mathbb{R}}^n \to [0, 1]$ und marginale Verteilungsfunktionen $F_1, ..., F_n$ so gilt, dass eine (oder mehrere) Copula $C : \bar{\mathbb{R}}^n \to [0, 1]$ definiert ist, für die gilt:

1. $H(z_1, ..., z_n) = C(F_1(z_1), ..., F_n(z_n))$;

2. C ist eindeutig auf $Ran(F_1) \times ... \times Ran(F_n) \subseteq Dom(C) = \bar{\mathbb{R}}^n$ definiert. Und falls $F_1, ..., F_n$ invertierbar sind, dann gilt $C(u_1, ..., u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), ..., F_n{-1}(u_n))$ für alle $(u_1, ..., u_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$.

Bemerkung 3.3.21. *Es ist* $H(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$.

Bemerkung 3.3.22. *Sei X mit invertierbaren Verteilungsfunktion F_X. Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende (und invertierbare auf $\mathbb{R}$) Funktion. Dann hat $\alpha(X)$ auch eine invertierbare Verteilungsfunktion $F_{\alpha(X)}$.*

Beweis. Sei α streng monoton steigend. $F_{\alpha(X)}(x) = \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x) = (X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_X(\alpha^{-1}(X))$. □

Notation: Sei $(X_1, ..., X_n)$ eine n-dim. ZV mit invertierbaren Randverteilungsfunktionen, dann bezeichnen wir dessen eindeutige Copula mit $C_{X_1,...,X_n} : \bar{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R}$ und dessen n-dim. Verteilungsfunktion mit $H_{X_1,...,X_n}$

Bemerkung 3.3.23. *Es ist* $F_{\alpha(X)}(\alpha(x)) = F_X(x)$, *weil* $F_{\alpha(X)}(\alpha(x)) = \mathbb{P}(\alpha(X) \leq \alpha(x)) = \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)$.

Satz 3.3.24. *Sei* $(X_1, ..., X_n)$ *eine* n*-dim. ZV mit invertierbaren Randverteilungsfunktionen* $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$. *Seien* $\alpha_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, ..., \alpha_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsende invertierbare auf* $\mathbb{R}$ *Funktionen. Dann gilt für die Copula* $C_{X_1,...,X_n} : \bar{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R}$ *von* $(X_1, ..., X_n)$ *und für die Copula* $C_{\alpha_1(X_1),...,\alpha_n(X_n)} : \bar{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R}$ *von* $(\alpha_1(X_1), ..., \alpha_n(X_n))$, *dass* $C_{X_1,...,X_n}(u_1, ..., u_n) = C_{\alpha_1(X_1),...,\alpha_n(X_n)}(u_1, ..., u_n)$ *für* $(u_1, ..., u_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$.

Beweis. Da die Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ von $(X_1, ..., X_n)$ und $F_{\alpha_1(X_1)}, ..., F_{\alpha_n(X_n)}$ von $(\alpha_1(X_1), ..., \alpha_n(X_n))$ invertierbar sind, folgt dass die Copulas $C_{X_1,...,X_n}$ bzw. $C_{\alpha_1(X_1),...,\alpha_n(X_n)}$ von $(X_1, ..., X_n)$ bzw. $(\alpha_1(X_1), ..., \alpha_n(X_n))$ eindeutig auf ganz $\bar{\mathbb{R}}^n$ bestimmt sind. Demnach $C_{X_1,...,X_n}(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)) = H_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(\alpha_1(X_1) \leq x_1, ..., \alpha_n(X_n) \leq x_n) = H_{\alpha_1(X_1)}, ..., \alpha_n(X_n)(\alpha_1(x_1), ..., \alpha_n(x_n)) = C_{\alpha_1(X_1)}, ..., \alpha_n(X_n)(F_{\alpha_1(X_1)}(x_1), ..., F_{\alpha_n(X_n)}(x_n)) = C_{\alpha_1(X_1)}, ..., \alpha_n(X_n)(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n))$. Da $Ran(F_1) \times ... \times Ran(F_n) = [0, 1] \times ... \times [0, 1]$ folgt die Aussage. □

Wir schränken uns auf der Fall $n = 2$ ein.

Erinnerung:

1. Für alle ZV (X, Y) mit 2-dim. Verteilungsfunktion H und marginale Verteilungsfunktion F und G gibt es mindestens eine Copula $C : \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to [0, 1]$ s.d. $H(x, y) = C(F(x), G(y))$;

2. Auf dem $Ran(F) \times Ran(G)$ ist C eindeutig definiert, insbesondere ist C eindeutig definiert auf $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$ falls F und G streng monoton und stetig sind (denn dann ist $Ran(F) = Ran(G) = \bar{\mathbb{R}}$).

3. Seien F^{-1} bzw. G^{-1} die quasi-inverse Funktionen der marginalen Verteilungsfunktionen F bzw. G, dann gilt: $C(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$ ist eine Copula für (X,Y).

4. Die quasi-inverse Funktion $F^{-1} : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$ ist die Funktion $F^{-1}(t) = inf\{x|F(x) \geq t\} = sup\{x|F(x) \leq t\}$ (es gilt, weil F rechtsstetig ist).

Notation: $C_{X,Y}$ ist eine Copula die zur bivariaten ZV (X,Y) gehört.

Satz 3.3.25. *Seien X bzw. Y ZV mit streng monotone und stetige Verteilungsfunktionen F bzw. G. Falls $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige (oder linkstetige, oder rechtsstetige) Funktionen sind, die streng monoton wachsend auf $Ran(X)$ bzw. $Ran(Y)$ sind. Dann gilt $C_{X,Y}$*

Bemerkung 3.3.26. *Die Menge $Ran(X)$ bzw. $Ran(Y)$ ist kein Kompaktum. Die ZV $\alpha(X)$ hat eine streng monotone Verteilungsfunktion und zwar $F_2(x) = F(\alpha^{-1}(x))$, weil $F_2(x) = \mathbb{P}(\alpha(x) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F(\alpha^{-1}(x))$. Natürlich gilt auch, dass $\beta(Y)$ eine streng monotone Verteilungsfunktion $G_2(y) = G(\beta^{-1}(y))$ hat. Falls α, β stetig sind, folgt $Ran(F_2) = Ran(G_2) = \bar{\mathbb{R}}$.*

Beweis des Satzes. $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) = \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) = C_{X,Y}(F(\alpha^{-1}(x)), G(\beta^{-1}(y))) = C_{X,Y}(F_2(x), G_2(y))$. Folglich $C_{X,Y}(u,v) = C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v)$ für alle $(u,v) \in Ran(F) \times Ran(G)$. □

Satz 3.3.27. *Sei (X,Y) eine bivariate ZV mit marginalen Verteilungsfunktionen F und G, die streng monoton und stetig. Seien $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stren monotone Funktionen auf $Ran(X)$ bzw. $Ran(Y)$, die stetig (oder linksstetig, oder rechtsstetig) sind. Dann gilt für alle $(u,v) \in Ran(F_2) \times Ran(G_2)$, wobei $F_2(x)$ bzw. $G_2(x)$ die Verteilungsfunktionen von $\alpha(X)$ bzw. $\beta(Y)$ sind, dass:*

A. *Falls α streng monoton wachsend und β streng monoton sinkend, dann gilt $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = u - C_{X,Y}(u,1-v)$;*

B. *Falls α streng monoton sinkend und β streng monoton steigend, dann gilt $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = v - C_{X,Y}(1-u,v)$;*

C. *Falls α, β streng monoton sinkend $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = u + v - 1 + C_{X,Y}(1-u,1-v)$*

Bemerkung 3.3.28. *Falls β streng monoton sinkend, so gilt für die Verteilungsfunktion $G_2(y)$ von $\beta(Y)$, dass $G_2(y) = 1 - G(\beta^{-1}(y))$ weil $G_2(y) = \mathbb{P}(\beta(Y) \leq y) = \mathbb{P}(Y \geq \beta^{-1}(y)) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq \beta^{-1}(y)) = 1 - G(\beta^{-1}(y))$. Es folgt dann auch $G_2^{-1}(v) = \beta(G^{-1}(v)) + 1$.*

Beweis des Satzes. $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) = \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq x) = \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x, Y \geq \beta^{-1}(y)) = \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x) - \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x, Y \leq \beta^{-1}(y)) = F_2(x) - C_{\alpha(X),Y}(F_2(x), G(\beta^{-1}(y))) = F_2(x) - C_{\alpha(X),Y}(F_2(x), 1 - G_2(y)) = F_2(x) - C_{X,Y}(F_2(x), 1 - G_2(y))$. Folglich $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = u - C_{X,Y}(u,1-v)$ für alle $(u,v) \in Ran(F_2) \times Ran(G_2)$. □

Definition 3.3.29. *Für alle $(u,v) \in [0,1]^2$ nennen wir $M(u,v) = min(u,v)$ die **Komonotoniecopula** und $W(u,v) = max(u+v-1,0)$ die **Kontromonotoniecopula**.*

Bemerkung 3.3.30. *$W(u,v) = max(u+v-1,0) = u - min(u,1-v) = u - M(u,1-v)$ und $M(u,v) = u - W(u,1-v)$. Dazu haben wir gesehen, ist X uniform, so $C_{X,X}(u,v) = M(u,v)$ und $C_{X,1-X}(u,v) = W(u,v)$.*

Satz 3.3.31 (Frechet-Hoefding-Ungleichnug)**.** *Für alle Copulas $C : \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$ fur alle $(u,v) \in [0,1]^n$ gilt $W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v)$.*

Beweis. Siehe Nelson. □

Korollar 3.3.32. *Sei H eine bivariate Verteilungsfunktion mit marginalen Verteilungsfunktionen F, G, dann gilt $\max(F(x)+G(y)-1,0) \leq H(x,y) \min(F(x),G(y))$.*

Beweis. Folgt aus dem Satz von Sklar. □

Bemerkung 3.3.33. *Streng monotone Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind in jedem Punkt links- oder rechts-stetig.*

Bemerkung 3.3.34. *Die Copula $C_{X,Y}$ ist durch die bivariate Verteilung und Randverteilungen definiert, d.h. ist $(X,Y) \sim (Z,\tilde{Z})$, so ist $C_{X,Y} = C_{Z,\tilde{Z}}$.*

Satz 3.3.35 (von Frechet-Hoeffding)**.** *Sei (X,Y) eine bivariate ZV.*

(i) Falls $C_{X,Y} = M(u,v)$, dann existieren zwei streng monoton wachsende Funktionen $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine ZV, s.d. $(X,Y) \sim (\alpha(Z), \beta(Z))$;

(ii) Falls $C_{X,Y}(u,v) = W(u,v)$ dann existieren eine streng monoton wachsende Funktionen $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und streng monoton sinkende Funktionen $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine ZV Z, s.d. $(X,Y) \sim (\alpha(Z), \beta(Z))$.

Umgekehrt: Falls $(X,Y) \sim (\alpha(Z), \beta(Z))$ mit einer ZV Z und

(a) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monotom wachsende Funktionen, dann gilt $C_{X,Y} = M(u,v)$;

(b) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton sinkend, dann gilt $C_{X,Y}(u,v) = W(u,v)$.

(Aussage des Satzes im Nelson oder Embrecht&Co ohne Beweis)

Beweis.

"$\Leftarrow$" Wir beweisen das in dieser Vorlesung nur für den Fall, wo die Verteilungsfunktion $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von Z streng monoton und stetig ist.

(a) Seien also α und β streng monoton steigend. Dann $C_{X,Y}(u,v) = C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = C_{Z,Z}(u,v) = C_{K(Z),K(Z)}(u,v) = M(u,v)$, weil $K(Z)$ uniform ist.

(b) Sei also α streng monoton steigend, β streng monoton sinkend. $C_{X,Y}(u,v) = C_{\alpha(Z),\beta(Z)}(u,v) = u - C_{Z,Z}(u, 1-v) = u - C_{K(Z),K(Z)}(u, 1-v) = u - M(u, 1-v) = W(u,v)$.

"$\Rightarrow$" In dieser Vorlesung beweisen wir es für den Fall, wo die Randverteilungsfunktion F, G streng monoton und stetig sind.

(i) Sei $C_{X,Y}(u,v) = M(u,v)$, dann folgt $C_{F(X),G(Y)}(u,v) = C_{X,Y}(u,v) = M(u,v)$ und da $F(X)$ bzw. $G(Y)$ uniform verteilt ist, folgt es $(F(X), G(Y)) \sim (Z, Z)$, wobei Z uniform ist, weil die Verteilungsfunktion H von $(F(X), G(Y))$ mit M übereinstimmt. Folglich $(X, Y) \sim (F^{-1}(Z), G^{-1}(Z))$ da F^{-1}, G^{-1} streng monoton, also folgt die Aussage.

(ii) Sei $C_{X,Y}(u,v) = W(u,v)$, dann $C_{F(X),G(Y)}(u,v) = W(u,v)$. Da $F(X)$ bzw. $G(Y)$ uniform verteilt ist folgt mit dem Satz von Sklar $(X, Y) \sim (F^{-1}(Z), G^{-1}(1-Z))$. Die F^{-1} ist streng monoton steigend, $F^{-1}(1-Id)$ streng monoton sinkend, also folgt die Aussage. $\square$

Satz 3.3.36. *Sei (X, Y) eine bivariate ZV mit streng monotonen und stetigen Randverteilungsfunktionen F und G.*

I. $C_{X,Y}(u,v) = M(u,v) \Leftrightarrow Y = G^{-1}(F(X))$ $\mathbb{P}$-*f.s.*

II. $C_{X,Y}(u,v) = W(u,v) \Leftrightarrow Y = G^{-1}(1 - F(X))$ $\mathbb{P}$-*f.s.*

Bemerkung 3.3.37. *Falls $Y = G^{-1}(F(X))$ $\mathbb{P}$-f.s. mit F, G streng monotone und stetige Verteilungsfunktionen, so folgt, dass Y die G als Verteilungsfunktion hat, denn $\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(G^{-1}(F(X)) \le y) = \mathbb{P}(X \le F^{-1}(G(y))) = F(F^{-1}(G(y))) = G(y)$.*

Beweis des Satzes.

I. "$\Rightarrow$" Wir haben gesehen $(F(X), G(Y)) \sim (Z, Z)$, wobei Z uniform verteilt ist. Wir zeigen $F(X) = G(Y)$ $\mathbb{P}$-f.s. und folglich $Y = G^{-1}(F(X))$ $\mathbb{P}$-f.s. Es ist $\mathbb{P}(F(X) = G(Y)) = \mathbb{P}(\cup_n \cap_{k \ge n} |F(X) - G(Y)| \le \frac{1}{k}) = \mathbb{P}(\liminf_n |F(X) - G(Y)| \le \frac{1}{n}) = 1 - \mathbb{P}(\limsup_n |F(X) - G(Y)| > \frac{1}{n})$. Weiter ist $\mathbb{P}(\limsup_n |F(X) - G(Y)| > \frac{1}{n}) \le \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|F(X) - G(Y)| > \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Z - Z| > \frac{1}{n}) = 0$.

"$\Leftarrow$" Sei $Y = G^{-1}(F(X))$ $\mathbb{P}$-f.s. mit F, G streng monotone stetige Verteilungsfunktionen, wobei F die Verteilungsfunktion von X. Also G ist die Verteilungsfunktion von Y. Und $C_{X,Y}(u,v) = C_{X,F^{-1}(G(X))}(u,v) = C_{F(X),G(Y)}(u,v) = M(u,v)$.

II. "$\Rightarrow$" Sei $C_{X,Y}(u,v) = W(u,v)$. Folglich $C_{F(X),1-G(Y)}(u,v) = u - C_{X,Y}(u,1-v) = u - W(u,1-v) = M(u,v)$. Es ist $F(X) \sim U_{[0,1]} \sim Z$, $1-G(Y) \sim 1-Z \sim Z$ und $C_{F(X),1-G(Y)}(u,v) = M(u,v)$. Nun $(F(X), 1-G(Y)) \sim (Z,Z)$ mit $Z \sim U_{[0,1]}$. Also $F(X) = 1 - G(Y)$ $\mathbb{P}$-f.s. und es folgt die Behauptung.

"$\Leftarrow$" Sei $Y = G^{-1}(1-F(X))$ $\mathbb{P}$-f.s., dann $C_{X,Y}(u,v) = C_{X,G^{-1}(1-F(X))}(u,v) = C_{G(X),1-F(X)}(u,v) = C_{X,1-F(X)}(u,v) = u - C_{X,X}(u,1-v) = u - M(u,1-v) = W(u,v)$. □

Copula sind nützlich um **systematischen Risiko** zu untersuchen, d.h. gegeben z.B. zwei Verluste V, L, wobei L und V meistens nicht stochastisch unabhängig sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass L ein Schwellenrisiko l überschreitet, falls V den Schwellenrisiko v überschreitet, wir sind interessiert an $\mathbb{P}(L > l | V > v)$. Seien F_V und F_L die Randverteilungen von (V, L). Wir fixieren:

$$\mathbb{P}(L \le l | V \le v) = \frac{\mathbb{P}(L \le l, V \le v)}{\mathbb{P}(V \le v)} \stackrel{1}{=} \frac{C_{L,V}(F_L(l), F_V(v)}{F_V(v)};$$

$$\mathbb{P}(L \le l | V > v) = \frac{\mathbb{P}(L \le l) - \mathbb{P}(L \le l, V \le v)}{\mathbb{P}(V > v)} \stackrel{2}{=} \frac{F_L(l) - C_{L,V}(F_L(l), F_V(v)}{1 - F_V(v)};$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L > l | V > v) &= \frac{\mathbb{P}(L > l, V > v)}{\mathbb{P}(V > v)} = \frac{\mathbb{P}(L > l) - \mathbb{P}(L > l, V \le v)}{1 - F_V(v)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(L > l) - (\mathbb{P}(V \le v) - \mathbb{P}(L \le l, V \le v))}{1 - F_V(v)} \\ &\stackrel{3}{=} \frac{1 - F_L(l) - F_V(v) + C_{L,V}(F_L(l), F_V(v)}{1 - F_V(v)}.\end{aligned}$$

Wir sind insbesondere an der Schwellenwerte $VaR_\alpha(L)$, $VaR_\beta(V)$ interessiert.

Annahme: Seien F_L, F_V streng monoton und stetig.

Bemerkung 3.3.38. *Es gilt folgendes* $\mathbb{P}(L \leq VaR_\alpha(L)|V \leq VaR_\beta(V)) = \frac{C_{L,V}(F_L(F_L^{-1}(\alpha), F_V(F_V^{-1}(\beta))}{F_V(F_V^{-1}(\beta))} = \frac{C_{L,V}(\alpha,\beta)}{\beta}$. *Folglich*

$$\mathbb{P}(L \leq VaR_\alpha(L)|V \leq VaR_\beta(V)) \overset{1}{=} \frac{C_{L,V}(\alpha,\beta)}{\beta} \overset{\alpha=\beta}{=} \frac{C_{L,V}(\alpha,\alpha)}{\alpha}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L)|V > VaR_\beta(V)) &\overset{3}{=} \frac{1-\alpha-\beta+C_{L,V}(\alpha,\beta)}{1-\beta} \\ &\overset{\alpha=\beta}{=} \frac{1-2\alpha+C_{L,V}(\alpha,\alpha)}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Definition 3.3.39. *Sei* $C_{L,V}(u,v)$ *die Copula von* (L,V).

- *Der* ***untere Teilabhängigkeitskoeffizient*** $\lambda_{\mathcal{L}}(L,V) = \lim\limits_{\alpha\searrow 0} \frac{C_{L,V}(\alpha,\alpha)}{\alpha}$;
- *Der* ***obere Teilabhängigkeitskoeffizient*** $\lambda_{\mathcal{U}}(L,V) = \lim\limits_{\alpha\nearrow 1} \frac{1-2\alpha+C_{L,V}(\alpha,\alpha)}{1-\alpha}$.

Bemerkung 3.3.40. *Falls* F_L *und* F_V *streng monoton und stetig sind, so gilt:*

- $\lambda_{\mathcal{L}}(L,V) = \lim\limits_{\alpha\searrow 0} \mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L)|V > VaR_\alpha(V))$;
- $\lambda_{\mathcal{U}}(L,V) = \lim\limits_{\alpha\nearrow 1} \mathbb{P}(L > VaR_\alpha(L)|V > VaR_\alpha(V))$.

Bemerkung 3.3.41. *Falls* $C_{L,V}(u,v) = uv$, *d.h.* $C_{L,V}$ *ist die* ***Unabhängigkeitscopula*** *(L und V sind stochastisch unabhängig), so ist:*

- $\lambda_{\mathcal{L}}(L,V) = \lim\limits_{\alpha\searrow 0} \frac{\alpha^2}{\alpha} = 0$;
- $\lambda_{\mathcal{U}}(L,V) = \lim\limits_{\alpha\nearrow 1} \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{1-\alpha} = 0$.

Definition 3.3.42. *Falls* $\lambda_{\mathcal{L}}(L,V) = 0 = \lambda_{\mathcal{U}}(L,V)$, *so sagt man, dass* (L,V) ***asymptotisch unabhängig*** *sind.*

Bemerkung 3.3.43. *Falls* (L,V) *asymptotisch unabhängig sind, so beeinflusst die eventuell Fat Tails der Marginale V nicht die Extremwerte in den Fat Tails der Marginale L.*

4 Ruintheorie

4.1 Zahlprozesse und Poisson-Prozesse

Sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ von $\mathbb{R}^n$ ist die kleinste σ-Algebra von $\mathbb{R}^n$, die alle $B_1 \times ... \times B_n$ enthält, wobei $B_1, ..., B_n \in \mathbb{R}$ Borelmengen von $\mathbb{R}$ sind. Sei T ein Intervall von $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann bezeichnet $\mathbb{R}^T$ den Raum von Funktionen $X : T \to \mathbb{R}$, mit $t \mapsto X_t$. Seien $t_1 < ... < t_n \in T$ und $B^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mathscr{C}_{t_1,...,t_n}(B^n) := \{x \in \mathbb{R}^T | (x_{t_1}, ..., x_{t_n}) \in B^n\}$ ein Zylinder in $\mathbb{R}^T$ mit Basis in $\mathbb{R}^n$. Die kleinste σ-Algebra, die alle solche Zylinder enthält, ist die Zylindrische-σ-Algebra von $\mathbb{R}^T$ und wird mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ bezeichnet.

Definition 4.1.1. *Ein $\mathbb{R}$-wertiger* ***stochastischer Prozess*** *mit stetigem Zeitraum T ist eine messbare Abbildung $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$.*

Notation: $(X_t)_{t\in T}$, $(X_t)_{t\geq 0}$.

Bemerkung 4.1.2. *Sei $t \in T$ fest. Dann ist $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ mit $\omega \mapsto X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, so erhalten wir die Funktion $t \mapsto X_t(\omega)$ für $t \in T$, welche wir der* ***Pfad*** *von X_t nennen.*

Definition 4.1.3. *Die Verteilung von $(X_t)_{t\in T}$ ist für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ gegeben durch $\mathbb{P}_{X_t}(B) := \mathbb{P}(X_t \in B)$.*

Definition 4.1.4. *Die stochastische Prozesse $X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}$ über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißen* ***unabhängig****, falls für alle $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ gilt*

$$\mathbb{P}(X_t^{(1)} \in B_1, \dots, X_t^{(n)} \in B_n) = \mathbb{P}(X_t^{(1)} \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_t^{(n)} \in B_n).$$

Definition 4.1.5. *Die* ***endlich-dimensionale Verteilung*** *[fdd] eines stoch. Prozesses $(X_t)_{t\in T}$ ist gegeben durch $\mathbb{P}_{t_1,...,t_n}(B^{(n)}) = \mathbb{P}(X_{t_1}, ..., X_{t_1} \in B^{(n)})$ für alle $t_1 < t_2 < ... < t_n \in T$, $B^{(n)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ein stoch. Prozess kann durch die Klasse seiner fdd vollständig bestimmt werden.*

Satz 4.1.6 (Kolmogorov/Existenz). *Für jede Klasse von fdd* $\{\mathbb{P}_{t_1,...,t_n}\}_{t_1<...<t_n\in T}$, $n \in \mathbb{N}_0$ *existiert ein W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *und ein stoch. Prozess* $X = (X_t)_{t\in T}$ *der über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *definiert ist, s.d.* $\mathbb{P}(X_{t_1}, ..., X_{t_1} \in B^{(n)}) = \mathbb{P}_{t_1,...,t_n}(B^{(n)})$ *für alle* $t_1 < ... < t_n \in T$, $B^{(n)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, $n \in \mathbb{N}_0$. *(ohne Beweis)*

Definition 4.1.7. *Ein stoch. Prozess* X *hat* ***stationäre Zuwächse*** *falls die Verteilung von* $X_t - X_s = \triangle_{s,t}$ *von* s *und* t *nur durch* $t - s$ *abhängig ist für alle* $s < t \in T$, *also* $X_t - X_s = X_{t-s}$.

Definition 4.1.8. *Ein stoch. Prozess* X *hat* ***unabhängige Zuwächse****, falls für alle* $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < ... < s_k < t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}_0$, *gilt, dass* $X_{t_1} - X_{s_1}, ..., X_{t_k} - X_{s_k}$ *unabhängig sind.*

Definition 4.1.9. *Ein* ***Zählprozess*** *mit Zeitraum* $T = \mathbb{R}^+$ *ist ein* $\mathbb{N}$*-wertiger Prozess* $(N_t)_{t\geq 0}$ *mit der Eigenschaft* $N_s \leq N_t$ *fast sicher,* $0 \leq s \leq t < \infty$.

Wenn nun X eine Poisson-verteilte ZV mit Parameter $\lambda \geq 0$ ist, dann ist für $n \in \mathbb{N}$ die W-keitsverteilung gegeben durch $\mathbb{P}(X = n) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}$ und es ist $\mathbb{E}[X] = \lambda$.

Definition 4.1.10. *Sei* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *eine Familie von* σ*-Algebren von Teilmengen aus* Ω. *Ein stoch. Prozess* $X_{t\geq 0}$ *heißt* $\mathcal{F}_t$***-adaptiert****, falls für jedes* $t \geq 0$ *auch die Funktion* $\omega \to X_t(\omega)$ $\mathcal{F}_t$*-messbar ist.*

Definition 4.1.11. *Ein càdlàg (continue à droite, limite à gauche, rechtsseitig stetig, mit Grenzenwerten von links) und adaptierter Zahlprozess* $N_{t\geq 0} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}_0$ *heißt* ***Poisson-Prozess*** *[PP], falls*

1) $N_0 = 0$;

2) $N_{t\geq 0}$ *hat unabhängige Zuwächse;*

3) $N_{t\geq 0}$ *hat Poisson-verteilte Zuwächse mit Parametern* $\lambda(t-s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$.

Wir nennen $\lambda > 0$ *die Intensität des Poisson-Prozesses.*

Definition 4.1.12. *Sei $N_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess und $X_1, \ldots$ eine Folge von i.i.d ZVen, unabhängig von $N_{t\geq 0}$ mit gemeinsamer Verteilung $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt der zusammengesetzter Prozess $Z_t = \sum_{k=0}^{N} X_k$, $Z_0 = 0$, $t \geq 0$ der **zusammengesetzter Poisson-Prozess** [CPP]. Wir schreiben $\triangle Z_{s,t} = Z_t - Z_s = \sum_{k=N_{s+1}}^{N_t} X_k$.*

Wie Zählprozess ist ein CPP $Z_{t\geq 0}$ auch ein Sprung-Prozess. Jedoch die Sprünge nicht mehr einheitlich, sondern zufällig und genau durch $X_1, ..., X_n, ...$ gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ sind Ereigniszeiten des PP $N_{t\geq 0}$ gegeben durch $T_n = \inf\{n \geq 0 \mid N_t > n\}$, $T_0 = 0$. Umgekehrt erhalten wir aus $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch wieder den Zählprozess $N_{t\geq 0}$ mit $N_t = max\{n \geq 0 \mid T_n \leq t\}$, $t \geq 0$.

Satz 4.1.13. *Sei $N_{t\geq 0}$ ein PP mit Intensität $\lambda > 0$ und Ereigniszeiten $T_1, T_2, ...$ Dann sind $\triangle T_n = T_n - T_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ unabhängig und exponential-λ-verteilte ZVen.*

Beweis. Seien $t, t_1 > 0$. Dann gilt $\mathbb{P}(\triangle T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \exp(-\lambda t)$ und weiter $\mathbb{P}(\triangle T_2 > t \mid \triangle T_1 > t_1) = \mathbb{P}(N_{t_1+t} - N_{t_1} = 0 \mid N_{t_1} = 1) = \mathbb{P}(N_{t_1+t} - N_{t_1} = 0) = \mathbb{P}(N_{t_1,t_1+t} = 0) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \exp(-\lambda t)$, weshalb $\triangle T_2$ unabhängig ist von $\triangle T_1$ und gleichverteilt ist. Allgemein gilt für ein $n \geq 1$ und $t, t_1, ..., t_n > 0$, dass $\mathbb{P}(\triangle T_{n+1} > t \mid \triangle T_1 > t_1 ... \triangle T_n > t_n) = \mathbb{P}(N_{t_n+t} - N_{t_n} = 0 \mid N_{t_n} = n) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \exp(-\lambda t)$. □

Satz 4.1.14. *Sei $(\triangle T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängigen exp-λ-verteilte ZV und $N_{t\geq 0} = \max\{n \geq 0 \mid T_n \geq t\}$. Dann ist $(N_t)_{t\geq 0}$ ein PP mit Intensität $\lambda > 0$.*

Beweis. Sei $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \exp(-\lambda t)$ und $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t, T_{n+1} > t)$ und $T_{n+} = T_n + \triangle T_{n+1}$. Die gemeinsame Dichte von $(T_n, \triangle T_{n+1}$ ist wegen Unabhängigkeit gegeben durch $h(y, u) = \frac{\lambda^n}{r(n)} \exp(-\lambda y) y^{n-1} \lambda \exp(-\lambda u)$ mit $u, y > 0$. Sei $A_t = \{(y, u) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 < y < t,\ t - y < u < \infty\}$. Dann gilt $\mathbb{P}(N_t = n) = \int_{A_t} h(y, u) dydu = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, weshalb $N_t \sim Pois(\lambda, t)$. □

Definition 4.1.15. *Seien $D_1, D_2, ...$ nichtnegative iid ZVen, $T_n = \sum_i D_i$, $D_0 = 0$ und $N_{t\geq 0} = \max\{n \geq 0 \mid T_n \geq t\}$. Dann heißen die drei unabhängige stoch. Prozesse $(T_n)_{n\geq 1}$, $(D_n)_{n\geq 1}$, $(N_t)_{t\geq 0}$* ***Erneuerungsprozesse****.*

4.2 Risikoprozess

4.2.1 Komponenten des Risikoprozesses

Definition 4.2.1 (Cramer-Lundberg)**.** *Sei $X_1, X_2, ...$ eine Folge iid ZVen mit $X_i \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ PP mit Intensität $\lambda > 0$. Dann definieren wir einen zusammengesetzter Prozess durch $Z_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$, $t \geq 0$, $X_0 = 0$. Seien $c > 0$, $r_0 \geq 0$ Konstanten. Dann definieren wir den* ***Risikoprozess*** *durch $Y_t = r_0 + c_t - Z_t$, $t \geq 0$.*

Interpretation im Kontext einer Versicherung

- $X_1, X_2, ...$ individuelle Schadensbeiträge;

- N_t Anzahl der Schäden, die im Zeitintervall $[0, t]$ eintreten;

- Z_t stochastische Komponente, d.h. Summanden entsprechen den einzelnen Schadensbeiträge;

- c Prämienintensität/Prämiensatz;

- r_0 Anfangskapital.

4.2.2 Ruinwahrscheinlichkeit

Definition 4.2.2. *Die* ***Ruinwahrscheinlichkeit im unendlichen Zeithorizont*** *des Risikoprozesses $(Y_t)_{t\geq 0}$ ist gegeben durch $\psi(r_0) = \mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} Y_t < 0)$. Sein Komplement nennen wir die* ***Überlebenswahrscheinlichkeit im unendlichen Zeithorizont****, diese ist gegeben durch $R(r_0) = 1 - \psi(r_0)$.*

Bemerkung 4.2.3. *Die Ruinwahrscheinlichkeit ist die W-keit, dass der Risikoprozess jemals unter Null fallen wird. Dieses Ereignis nennen wir den* ***Ruin****.*

Definition 4.2.4. *Die* ***Ruinwahrscheinlichkeit im endlichen Zeithorizont*** $[0, t^+]$, $t^+ > 0$ *ist gegeben durch* $\psi(r_0, t^+) = \mathbb{P}(\inf_{0 \le t \le t^+} Y_t < 0)$. *Sein Komplement nennen wir die* ***Überlebenswahrscheinlichkeit im endlichen Zeithorizont****,* $[0, t^+]$, $t^+ > 0$, *diese ist gegeben durch* $R(r_0, t^+) = 1 - \psi(r_0, t^+)$.

Bemerkung 4.2.5. *Die so definierte Ruinwahrscheinlichkeit ist die W-keit, dass der Risikoprozess* $(Y_t)_{t \ge 0}$ *vor Zeitpunkt* t^+ *unter Null fallen wird. Der* ***Ruinzeitpunkt*** T *lässt sich dann wie folgt definieren:*

$$T = \begin{cases} \inf\{t \ge 0 \ Y_t \le 0\} & \textit{falls existiert,} \\ -\infty & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für $(Y_t)_{t \ge 0}$, *dass* $\psi(r_0, t^+) = \mathbb{P}(T < t^+)$, $t^+ \in (0, \infty)$ *und* $\psi(r_0) = \lim\limits_{t^+ \to \infty} \psi(r_0, t^+)$.

Definition 4.2.6. *Der* ***angehäufte Verlustprozess*** $(L_t)_{t \ge 0}$ *ist definiert durch* $L_t = Z_t - ct = r_0 - Y_t$, $t \ge 0$. *Wir nennen das Supremum von* $(L_t)_{t \ge 0}$ *im endlichen Zeithorizont* $[0, t^+]$ *den* ***maximal angehäuften Verlust*** *zum endlichen Zeithorizont* t^+. *Dieser ist gegeben durch* $S_{t^+} = \sup_{0 \le t \le t^+}\{L_t\}$, $t^+ \in (0, \infty)$ *(im unendlichen Zeitraum* $S_t = \sup_{t \ge 0}\{L_t\}$*).*

Satz 4.2.7. *Die Überlebenswahrschenlichkeit im endl. bzw. unendl. Zeithorizont ist gleich der Verteilungsfunktion von* S_{t^+} *bzw.* S_t.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass

1) $R(r_0, t^+) = \mathbb{P}(S_{t^+} \le r_0)$, wobei $r_0 \ge 0$, $t^+ \in \infty$, mit speziellem Wert $R(0, t^+) = \mathbb{P}(S_{t^+} = 0)$;

2) $R(r_0) = \mathbb{P}(S_t \le r_0)$, $r_0 \ge 0$, mit speziellem Wert $R(0) = \mathbb{P}(S_t = 0)$, $t > 0$.

Dazu seien $r_0 > 0$ und $t^+ \in (0, \infty)$. Es gilt $R(r_0, t^+) = 1 - \psi(r_0, t^+) = \mathbb{P}(\forall t \in$

$[0,t^+]\ \ Y_t \geq 0) = \mathbb{P}(\forall t \in [0,t^+]\ \ Z_t - ct < r_0) = \mathbb{P}(S_{t^+} \leq r_0)$. Weiter gilt, $Z_t - ct \restriction_{t=0} = 0$, also $S_{t^+} \geq 0$. Damit folgt $R(0,t^+) = \mathbb{P}(S_{t^+} \leq 0) = \mathbb{P}(S_{t^+} = 0)$. D.h., S_{t^+} besitzt $R(0,t^+) > 1$ eine positive W-keit an der Stelle 0, also gilt 1). Analog zeigt man 2). □

Definition 4.2.8. *Wir betrachten den Risikoprozess $(Y_t)_{t\geq 0}$ und seine Ruinwahrschenlichkeit $\psi(r_0) = \mathbb{P}(T < \infty)$. Die **Value-at-Ruin** zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ ist definiert durch $VaRu(\alpha) = \inf\{x \geq 0 \mid \psi(x) \leq \alpha\}$. Beim endl. Zeithorizont: $VaRu(\alpha, t^+) = \inf\{x \geq 0 \mid \psi(x, t^+) \leq \alpha\}$.*

Bemerkung 4.2.9. *$VaRu$ ist nicht subadditiv, also nicht kohärent.*

Lemma 4.2.10. *O.B.d.A können wir stets $c = 1$ in $(Y_t)_{t\geq 0}$ annehmen.*

***Beweis*.** Sei $\tilde{Y}_t = Y_{\frac{t}{c}} = r_0 + t + Z_{\frac{t}{c}}$, $t \geq 0$. Dann gelten $\mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} \tilde{Y}_t < 0) = \mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} Y_t < 0) = \psi(r_0)$ und $\mathbb{P}(\inf_{0\leq t\leq t^+} \tilde{Y}_t < 0) = \mathbb{P}(\inf_{0\leq t\leq \frac{t^+}{c}} Y_t < 0) = \psi(r_0, \frac{t^+}{c})$. □

Bemerkung 4.2.11. *Wenn $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein CPP ist mit Parameter λ, dann ist $(\tilde{Y}_t)_{t\geq 0}$ wieder ein CPP aber mit Parameter $\frac{\lambda}{c}$. Analog tauscht sich stets der Zeithorizont $\frac{t^+}{c}$ statt t^+ aus.*

Satz 4.2.12 (Beweis). *Betrachte $(Y_t)_{t\geq 0}$, wobei jetzt $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Erneurungsprozess ist, d.h. $N_t = \max\{n \geq 0 \mid T_n \geq t\}$ und $c = 1$. Seien $\rho = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[\triangle T_1]}$ und $\beta = \frac{c-\rho}{\rho}$, wobei $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Dann tritt Ruin fast sicher, falls $\beta < 0$.*

***Beweis*.** Definiere $V_i = \triangle T_i - X_i$, $i = 1,2,3,...$ und $C_n = r_0 + T_n - \sum_{i=1}^n X_i = r_0 + \sum_{i=1}^n V_i$, $i = 1,2,3,....$ Das sogenannte **Skelet** (d.h. der Zeit-diskrete) des Prozesses $(Y_t)_{t\geq 0}$ ist dann gegeben durch $C_n = Y_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Nun sei $\beta < 0$.
$\implies \mathbb{E}[V_1] < 0 \implies \sum V_i \to -\infty$ f.s. $\implies C_n \to -\infty$ f.s.
$\implies Y_{T_n} \to -\infty$ f.s. $\implies \inf_{n\geq 1} Y_{T_n} < 0 \implies$ Ruin tritt ein. □

Lemma 4.2.13 (Diskretisierungslemma)**.** *Betrachte den Verlustprozess $L_t = Z_t - ct = r_0 - Y_t$, $t \geq 0$, mit $c = 1$, d.h. $L_t = Z_t - t$, $t \geq 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_+$, $n > 0$, und $t \in [nh, (n+1)h]$, dass $L_{nh} - h \leq L_t \leq L_{(n+1)h} + h$.*

Beweis. Seien $r, s \geq 0$. $L_{r+s} - L_r$ minimal in $[r, r+s]$, wenn alle $X_i = 0$, $i = 1, 2, 3, ...$, in dem Intervall und das Minimum ist dann $-s$. Also ist $L_{r+s} \geq L_r - s$. Jetzt gilt für $t = nh + s$ und $s \in [0, h]$, $L_t \geq L_{nh} - s \geq L_{nh} - h$. Analog zeigt man die Beschränktheit von oben. $\square$

Satz 4.2.14. *Seien ρ und β wie oben. Sei $(L_t)_{t\geq 0} = (Z_t - t)_{t\geq 0}$ mit unabhängigen stationären Zuwächsen. Dann gelten folgende Aussagen:*

1) $\forall \beta \in \mathbb{R}$ $\frac{L_t}{t} \longrightarrow \rho - 1$ f.s.;

2) Falls $\beta < 0$, so ist $L_t \longrightarrow \infty$ f.s.;

3) Falls $\beta > 0$, so ist $L_t \longrightarrow -\infty$ f.s.;

4) Falls $\beta > 0$, so ist $\liminf_{t\to\infty} L_t = -\infty$ und $\limsup_{t\to\infty} L_t = \infty$ f.s.;

Beweis.

1) Sei $h > 0$. Dann ist $(L_{nh})_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt, d.h. ein stoch. Prozess in diskreter Zeit, wobei die Zuwächse jeder Zeiteinheit iid sind. Folglich $\frac{L_{nh}}{n} \to (\rho - 1)h$ f.s., wenn $n \to \infty$, wobei $L_h, L_{2h} - L_h, ...$ iid sind. Somit gilt $\liminf_{t\to\infty} \frac{L_t}{t} = \lim_{n\to\infty} \inf_{t\geq nh} \frac{L_t}{t} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \inf_{kh\leq t\leq (k+1)h} \frac{L_t}{t} = \lim_{n\to\infty} \inf_{nh\leq t\leq (n+1)h} \frac{L_t}{t} \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{L_{nh}-h}{(n+1)h} = \frac{1}{h} \liminf_{n\to\infty} \frac{L_{nh}}{n} = \rho - 1$ fast sicher. Analog zeigt man, dass $\limsup_{t\to\infty} \frac{L_t}{t} \leq \rho - 1$;

2)&3) Klar, wegen 1);

4) Folgt als Resultat der Irrfahrt (siehe z.B. Durret, Th.4.1.2).

$\square$

Korollar 4.2.15. *Seien ρ und β wie oben und $c = 1$. Sei der Verlustprozess $L_t = Z_t - t$ mit unabhängigen stationären Zuwächsen. Sei $r_0 \geq 0$. Dann gilt:*

$$\psi(r_0) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } \beta \leq 0; \\ -1 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Der maximal angehäufte Verlust ist durch $S_t = \sup_{t\geq 0} L_t$ gegeben. Falls $\beta < 0$, ist $S_t = \infty$ fast sicher. Also $\psi(r_0) = \mathbb{P}(S_t > r_0) = 1$. Falls $\beta = 0$, so ist $S_t \geq \limsup_{t\to\infty} L_t = \infty$ fast sicher, also wieder $\psi(r_0) = 1$. Falls $\beta > 0$, genügt es zu zeigen, dass aus $\psi(r_0) < \psi(0)$ folgt, dass $\psi(0) = \mathbb{P}(S_t > 0) < 1$ gilt. Angenommen es gilt $\psi(r_0) < \psi(0)$, aber es folgt $\psi(0) = \mathbb{P}(S_t > 0) = 1$. Dann gilt, dass $(L_t)_{t\geq 0}$ die Nulllinie von unten nach oben fast sicher durchkreuzt. Sei jetzt T_1 die erste Zeit, in der die Nulllinie von unten gekreuzt wird. Aus dem Satz folgt dann, dass $(L_t)_{t\geq 0}$ die Nulllinie von oben nach unten fast sicher kreuzt. Dann folgt aus $\mathbb{P}(S_t > 0) = 1$, dass $(L_t)_{t\geq 0}$ die Nulllinie von unten nach oben fast sicher durchkreuzt.Diese Schema wiederholt man und stellt fest, dass $(L_t)_{t\geq 0}$ die Nulllinie unendlich oft kreuzen wird. Widerspruch zu $L_t \longrightarrow -\infty$ f.s. $\square$

Satz 4.2.16. *Sei $L_t = Z_t - t$, $t \geq 0$, wobei der PP Intensität $\lambda > 0$ hat und $\mu_2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, sowie $c = 1$. Dann folgt $U_t = t^{-1/2}(L_t - t(\rho - 1))$ gegen $\mathcal{N}(0, \lambda\mu_2)$ in Verteilung.*

Beweis. Sei $h > 0$. Da (L_t) cadlag,, stationäre und unabhängige Zuwächse hat, folgt, dass $(L_{nh})_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt ist mit $\mathbb{V}(L_h) = \lambda\mu_2 h$. Also $U_{nh} \to \mathcal{N}(0, \lambda\mu_2)$ in Verteilun, demnach ist die Aussage bewiesen für $t \in [nh, (n+1)h]$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $t_n \in [nh, (n+1)h]$. Es folgt $R_n = ((n+1)h)^{-1/2}(L_{nh} - h - (n+1)h(\rho - 1)) \leq t_n^{-1/2}(L_{th} - t_n(\rho - 1)) = U_{t_n}$ und $U_{t_n} \leq (nh)^{\frac{-1}{2}}(L_{(n+1)h} + h + nh(\rho - 1)) = S_n$. Also gilt $R_n \to \mathcal{N}(0, \lambda\mu_2)$ und $S_n \to \mathcal{N}(0, \lambda\mu_2)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(S_n \leq x) \leq \mathbb{P}(U_{t_n} \leq x) \leq \mathbb{P}(R_n \leq x)$, weshalb insgesamt $U_{t_n} \to \mathcal{N}(0, \lambda\mu_2)$ in Verteilung. $\square$

4.2.3 Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit mit Hilfe der Integro-Differentialgleichung

Ziel: Herleitung einer Integro-Differentialgleichung zur Ruinwahrscheinlichkeit im unendlichen Zeithorizont $\psi(r_0)$ als Funktion der Variable $r_0 \geq 0$. Aus der

Definition folgt die infinitesimale Darstellung der Poisson-wahrschenlichkeit:

$$\mathbb{P}(N_h = k) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & \text{falls } k = 0; \\ \lambda h + o(h) & \text{falls } k = 1,\ h \to 0; \\ o(h) & \text{falls } k \geq 2,\ h \to 0. \end{cases}$$

Betrachte die folgende Fälle:

- $X_1 \leq r_0$ kein Ruin in $[0, h]$;
- $r_0 \leq X_1 \leq r_0 + ch$ so existiert ein $\delta \in (0, h]$, s.d. Ruin sicher in $[0, s)$ und unmöglich in $[s, h]$;
- $X_1 > r_0 + ch$ Ruin sicher in $[0, h]$.

Für $X_1 = x \in (r_0, r_0 + ch]$ gilt $r_0 + c\delta = x \Leftrightarrow \delta = \delta(x) = \frac{x - r_0}{c}$. Dann lässt sich folgende asymptotische Integro-Differentialgleichung finden: $\psi(r_0) = (1 - \lambda h)\psi(r_0 + ch) + \lambda h(\int_0^{r_0} \psi(r_0 + ch - x)dF(x) + \int_{r_0}^{r_0+h} \psi(r_0 + ch - x)dF(x) + \int_{r_0+h}^{\infty} dF(x)) + o(h)$, für $h \to 0$. Das ist äquivalent zur folgenden Gleichung: $\psi(r_0) - \psi(r_0 + ch) = -\lambda h(\psi(r_0 + ch) - \int_0^{r_0} \psi(r_0 + ch - x)dF(x) - \int_{r_0}^{r_0+h} \psi(r_0 + ch - x)dF(x) - (1 - F(r_0 + ch))) + o(h)$, für $h \to 0$.
Sei ψ differenzierbar. Dann folgt durch Grenzübergang:
$\psi'(r_0) = \frac{\lambda}{c}(\psi(r_0) - \int_0^{r_0} \psi(r_0 - x)dF(x) - (1 - F(r_0)))$.
Diese Gleichung heißt die **Integro-Differentialgleichung für die Ruinwahrscheinlichkeit** ψ.

Beispiel 4.2.17. *Für die Überlebenswahrscheinlichkeit* $1 - \psi(r_0) = R(r_0)$ *gilt* $R'(r_0) = \frac{\lambda}{c}R(r_0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^{r_0} R(r_0 - x)dF(x)$.
Betrachte die lineare Kombination von exp-Verteilungen mit der Dichte $f(x) = \exp(-3x) + \frac{10}{3}\exp(-5x)$, $x > 0$.
Dann gilt $\mu = \mathbb{E}[X_1] = \frac{11}{45}$. *Weiter ist* $\beta = \frac{4}{11}$ *und* $\frac{\lambda}{c} = \frac{3}{1}$.

Also haben wir $R'(r_0) = 3R(r_0) - 3\int_0^{r_0} R(r_0 - x) f(x) dx$.

Definiere $g_n(u) = \int_0^u \exp(ny) R(y) dy$. *Damit gilt:*

$R'(u) = 3R(u) - 3\exp(-3u) g_3(u) - 10\exp(-5u) g_5(u)$ *und*

$R''(u) = ... = -2R'(u) + 2R(u) - 6\exp(-3u) g_3(u)$ *und*

$R'''(u) = ... = -5R''(u) - 4R'(u)$.

Also ist $R'''(u) + 5R''(u) - 4R'(u) = 0$. *Nach der Lösung von DGL ergibt sich* $R(u) = 1 - \frac{32}{45}\exp(-u) - \frac{1}{45}\exp(-4u)$.

Literatur

[A]